

不飽和度の考え方をを使うオイラーの多面体定理の証明

(東理大理) ○井上 正之

Proof of Euler's Polyhedron Theorem with the Idea of Unsaturation

(Tokyo University of Science) ○Masayuki Inoue

The presenter explores learning materials that approach math from the perspective of chemistry. In this presentation, the proof of Euler's polyhedron theorem will be presented with the idea of "degree of unsaturation" learning in chemistry. The degree of unsaturation u in a hydrogen compound X_vH_n of a hypothetical element X (valence is x) is defined as $u = [(x - 2)v + 2 - n]/2$. The degree of unsaturation is expressed as $u = e - v + 1$; the number of vertices (X atoms) is v , the number of edges is e , and the number of faces is f . If a X_vH_n molecule has a three-dimensional polyhedral structure, $u = f - 1$. Then in polyhedron molecules, Euler's polyhedron theorem $\chi_g = v - e + f = 2$ is shown.

Keywords : Euler's Polyhedron Theorem; Degree of Unsaturation

演者は化学の視点から数学にアプローチする学習教材を検討している。本講演では化学で学習する「不飽和度」の考え方をを使うオイラーの多面体定理の証明を紹介する。

仮想元素 X (価数 x) の水素化合物 X_vH_n における不飽和度 u を $u = \frac{1}{2}[(x - 2)v + 2 - n]$ と定義する。いま X 原子間の結合はすべて単結合であり、 X 原子間の結合距離と X 原子に結合した原子の立体配置は任意に変更できるものとする。 X_vH_n 分子を図形と考え、角または頂点 (X 原子) の数を v 、辺の数を e 、面の数を f 、1つの頂点 i に集まる辺の数を c_i とすると、 $\sum_{i=1}^v c_i = 2e$ であるから $n = \sum_{i=1}^v (x - c_i) = vx - 2e$ となる。したがって $u = \frac{1}{2}[(x - 2)v + 2 - (vx - 2e)] = e - v + 1$ が成り立つ。

下図の例のように X_vH_n が鎖状構造である場合は $u = 0$ 、環状構造である場合には $u = f$ が成り立つ。環状構造を多面体構造にする場合には H 原子を 2 個少なくすればよい。このとき u が 1、 f が 2 増加するので $u = f - 1$ が成り立つ。以上のことからオイラーの多面体定理 $\chi_g = v - e + f = 2$ が示される。曲面で囲まれた立体図形を $v \rightarrow \infty$ とした X_vH_n 分子と考える (連続体を不連続体の極限と考える) と、孔があいていない立体図形について一般に $\chi_g = 2$ が成り立つことが理解できる。講演では孔があいた立体図形のオイラー数 χ_g を求めるための考え方も紹介する。

