

1次元パターンの良さ判断の統合的数理モデルの構築

Construction of an Integrated Mathematical Model for Goodness Judgments of One-Dimensional Patterns

久保 大樹[†], 日高 昇平[†]

Taiki Kubo, Shohei Hidaka

[†] 北陸先端科学技術大学院大学

Japan Advanced Institute of Science and Technology

s2510051@jaist.ac.jp

概要

「良い」という言葉は多義的であるが、パターンの良さ判断には人々に共通の傾向がみられる。これまで主観的な良さと客観的指標の結び付けが行われてきたが、対応関係の記述に留まり、演繹的な理論の構築には至っていない。本研究は、良さ判断の情報処理の解明に向けた第一歩として、パターンとその対称性がなす構造を圏論により定式化し、理論的土台を構築した。これにより、パターンや対称性などを数学的概念として扱うことが可能になったほか、対称性の高さとそれを満たすパターンの数の間に随伴関係が存在することが明らかになった。

キーワード: 良さ判断 (Goodness Judgment), パターン認知 (Pattern cognition), 1次元パターン (One-dimensional patterns), 圏論 (Category theory), 随伴関係 (Adjunction)

1. 背景

「良い」という言葉は多義的であり、明確な定義を持たない。それにもかかわらず、図 1. に示すような抽象的なパターンに対する良さの点数付け（パターンの良さ判断）を行うと、多くの実験参加者が類似した判断傾向を示すことが知られている。この事実は、人間の主観的な「良さ判断」が人に共通な情報処理の結果であることを示唆している (小西他, 2003)。

図 1 パターンの一例



パターンの良さ判断の研究は Garner & Clement (1963) の冗長構造説を端緒として、様々なアプローチが展開されてきた。例えば, Algom & Fitousi (2025) は、パターンにおいて、鏡映対称性を持つ隣接要素の割合を「部分対称性尺度」と定義し、これを用いてパターンの複雑さを算出した。その結果、複雑さが良

さ評定値と負の相関を持つこと、すなわち、単純なパターンほど良いと判断されるということを定量的に示した。また、天野他 (2013) や濱田他 (2024) は、パターンが持つ数理的構造に着目した。彼らは、パターンを左右反転や平行移動などの操作（認知的変換）で変化させた際、元のパターンと完全に一致する操作の種類が多い（不変性が高い）ほど、良さの評定値が高くなると予測した。これは、実験的に支持されている。

一方、パターンの物理的特徴だけでなく、観察者の知覚特性に着目した研究も存在する。児玉・三浦 (2011) は、同じパターンであっても観察者によって要素のまとめ方が異なることに着目し、知覚されるまとまりの数が少ないほど、良さ評定値が高くなることを示した。

これら一連の研究は、主観的な「良さ」を部分対称性尺度や不変性といった客観的指標と結び付けた点や、観察者の要素のまとめ方が良さ判断に及ぼす影響を示した点で、極めて有用な知見を提供してきた。

しかしながら、これら既存の研究は、客観的指標と良さ評定値の対応関係という法則を記述するにとどまり、「なぜその法則が成り立つのか」という理論の構築には至っていない。この「なぜ」に答え、良さ判断の背後にある共通な情報処理を必然性から明らかにするには、恣意的な仮説に依存しない演繹的な理論体系が求められる。

このような演繹的な理論体系を構築するための強力な数理的枠組みとして、圏論がある。例えば、ネットワークの知覚原理を説明した研究 (日高・高橋, 2021) や、人間の認知プロセスを導出した研究 (Phillips, 2021) などで用いられ、人間の知覚や認知を恣意的なパラメータに依存することなく理論として記述することに成功している。パターンの良さ判断もまた、単なる主観ではなく、対象の構造や対称性に深く根ざした知覚・認知的な現象であると考えられるため、圏論はその理論を構築する上でも極めて有用な基盤になると考えられる。

2. 目的

このような背景を踏まえ、本研究は、パターンの良さ判断の解明に向けた第一歩として、パターンとその対称性がなす構造を圏論的に定式化し、理論的土台を構築することを目的とする。

3. 良さ判断の理論的基盤

本章では、パターンと対称性の関係性を圏論を用いて定式化する。まず、図形の配置と変換を写像の可換図式を用いて定式化し、自己同型群によってパターンの対称性を厳密に定義する。次に、パターンの集合と変換の集合を対象とする2つの半順序圏をそれぞれ構成する。最後に、対称性の高さとそれを満たすパターンの集合の大きさの間に存在する制約構造を演繹的に導出し、その結果として両者の間に随伴関係が成立していることを明らかにする。

3.1 パターンの変換と数理的構造

本節では、図形やその状態を抽象的に扱うための数学的基盤を導入する。まず、本稿で対象とする図形や状態の空間的配置を「パターン」として定式化する。

定義 1 (パターン). 位置を表す集合を X , 状態を表す集合を Y とする。このとき、写像

$$p: X \rightarrow Y \quad (1)$$

をパターンと定義する。

ここで、 X は図形が配置される座標や位置の集合を表す。具体例として、2次元の離散空間 $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ や3次元の連続空間 $X \subseteq \mathbb{R}^3$ などが挙げられる。一方、 Y は各位置における色や輝度、あるいはその他の属性などの状態の集合を表す。具体的には、白黒の2値状態を表す $Y = \{0, 1\}$ や、RGB色空間 $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ などが想定される。すなわちパターンとは、「空間内の各位置に対して、ある状態を一意に割り当てる規則」を意味する。

次に、このパターンに対する幾何学的あるいは属性的な操作を表現するため、変換とその作用を定式化する。

定義 2 (変換と作用). 集合 X および Y 上の全単射

$$\sigma: X \rightarrow X, \quad \tau: Y \rightarrow Y \quad (2)$$

の組 $f = (\sigma, \tau)$ を、パターンに対する変換とする。

さらに、変換 f をパターン $p: X \rightarrow Y$ に作用させて得られる新たなパターン $f(p)$ を、以下の写像の合成として定義する。

$$f(p) = \tau^{-1} \circ p \circ \sigma \quad (3)$$

この定義における σ は空間的な位置の移動（回転や平行移動など）を、 τ は状態の変化（色の反転など）をそれぞれ表している。ここで状態の変換に逆写像 τ^{-1} が用いられているのは、空間上の変換 σ と状態上の変換 τ をそれぞれ施した際の関係性を示す可換図式 ($\tau \circ p = p \circ \sigma$) を、パターンそのものの写像として整合的に数式化するためである。

以上の準備に基づき、あるパターンが特定の変換によってその構造を保つという「対称」の概念を、写像の可換性を用いて厳密に定義する。

定義 3 (対称). パターン $p: X \rightarrow Y$ と変換 $f = (\sigma, \tau)$ が与えられたとする。パターン p が変換 f の作用のもとで対称であるとは、

$$p = \tau^{-1} \circ p \circ \sigma \quad (4)$$

が成立することと定義する。これは、以下の図式が可換となることと同値である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array} \quad (5)$$

この可換図式は、空間的な位置の変換 σ と状態の変換 τ の組である変換 f をパターン p に作用させて得られる新たなパターン $f(p)$ が、もとのパターン p と写像として完全に一致していること、すなわち変換の前後でパターンが変化していないことを意味する。

3.2 パターンの圏とその性質

本節では、個々のパターンが持つ対称性を、統一的な代数構造として扱うための枠組みを構成する。そのために、前節で定義したパターンと変換の関係性を用い、考え得る全てのパターンと変換を包含する圏を定義する。

定義 4 (パターンの圏 $\mathcal{P}$). パターンの圏 $\mathcal{P}$ を次のように定義する。

- **対象**: すべてのパターン $p: X \rightarrow Y$. 対象の全体を $\text{Ob}(\mathcal{P})$ と表す。
- **射**: 任意の対象 $p_i, p_j \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ に対して p_i から p_j への射の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(p_i, p_j)$ を、可換条件 $p_j = \tau^{-1} \circ p_i \circ \sigma$ を満たす変換 $f = (\sigma, \tau)$ の集合とする。
- **恒等射**: 任意の対象 $p \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ に対し、恒等射 id_p を、各集合の恒等写像からなる自明な変換 $(\text{id}_X, \text{id}_Y)$ とする。
- **射の合成**: 2つの射 $f_1 = (\sigma_1, \tau_1) \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(p_i, p_j)$ および $f_2 = (\sigma_2, \tau_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(p_j, p_k)$ の合成 $f_2 \circ f_1$ は、変換の合成 $(\sigma_2 \circ \sigma_1, \tau_2 \circ \tau_1)$ とする。

ここで、各変換は全単射の合成であるため、射の合成における結合法則は自明に満たされる。

この圏 $\mathcal{P}$ において、パターン固有の性質は以下のように記述される。

定義 5 (自己同型群). 任意のパターン $p \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ に対して p から p への射全体の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p)$ を p の自己同型群と呼び、 $\text{Aut}(p)$ と表す。すなわち、

$$\text{Aut}(p) = \text{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p) \quad (6)$$

である。圏 $\mathcal{P}$ における射の定義より、これを次のように表すこともできる。

$$\text{Aut}(p) = \{f = (\sigma, \tau) \mid p = \tau^{-1} \circ p \circ \sigma\} \quad (7)$$

本項で定義した自己同型群 $\text{Aut}(p)$ は、これまで定性的に扱われてきたパターンの「対称性」を厳密化した対象である。すなわち、自身を不変に保つ変換の数を示す自己同型群の位数 $|\text{Aut}(p)|$ は、そのパターンが備える「対称性の高さ」の定量的指標として解釈することができる。

3.3 パターンと変換の半順序圏と随伴関係

本節では、要求する対称性の高さと、それを満たすパターンの集合の間に存在する制約構造を定式化する。そのために、パターンの集合および変換の集合をそれぞれ対象とする2つの半順序圏と、その間の関係性を構成する。

まず、圏 $\mathcal{P}$ におけるすべてのパターンの冪集合を対象とする、パターンの集合の圏 $\mathcal{D}$ を定義する。

定義 6 (パターンの集合の圏 $\mathcal{D}$). 圏 $\mathcal{D}$ を以下のように定める。

- **対象** : $\text{Ob}(\mathcal{P})$ の冪集合とする。すなわち、

$$\text{Ob}(\mathcal{D}) = 2^{\text{Ob}(\mathcal{P})} = \{S \mid S \subseteq \text{Ob}(\mathcal{P})\} \quad (8)$$

- **射** : 任意の対象 $S_i, S_j \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、包含写像 $\iota : S_i \hookrightarrow S_j$ が存在するとき、かつそのときに限り、これを唯一の射とする。
- **恒等射** : 各対象 $S \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、包含写像 $S \hookrightarrow S$ を恒等射 id_S とする。
- **射の合成** : 射 $\iota_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S_i, S_j)$ および $\iota_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S_j, S_k)$ の合成を、写像の合成とする。

$$\iota_2 \circ \iota_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S_i, S_k) \quad (9)$$

次に、変換の集合の圏を構成するため、圏 $\mathcal{P}$ に存在するすべてのパターンに対する自己同型群の和集合 $\text{Aut}(\mathcal{P})$ を以下のように定義する。

$$\text{Aut}(\mathcal{P}) = \bigcup_{p \in \text{Ob}(\mathcal{P})} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p)$$

この $\text{Aut}(\mathcal{P})$ を基盤として、変換の集合の圏 $\mathcal{C}$ を構成する。

定義 7 (変換の集合の圏 $\mathcal{C}$). 圏 $\mathcal{C}$ を以下のように定める。

- **対象** : $\text{Aut}(\mathcal{P})$ の冪集合とする。すなわち、

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = 2^{\text{Aut}(\mathcal{P})} = \{T \mid T \subseteq \text{Aut}(\mathcal{P})\} \quad (10)$$

- **射** : 任意の対象 $T_i, T_j \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、包含写像 $\iota : T_i \hookrightarrow T_j$ が存在するとき、かつそのときに限り、これを唯一の射とする。
- **恒等射** : 各対象 $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、包含写像 $T \hookrightarrow T$ を恒等射 id_T とする。
- **射の合成** : 射 $\iota_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i, T_j)$ および $\iota_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_j, T_k)$ の合成を、写像の合成とする。

$$\iota_2 \circ \iota_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i, T_k) \quad (11)$$

これらの圏 $\mathcal{C}$ および $\mathcal{D}$ は、ともに対象間に包含写像が存在するときのみただ1つの射が存在するように定義されている。したがって、両者は対象の包含関係を順序とみなす「半順序圏 (Poset Category)」をなす。

次に、構成したこれら2つの半順序圏を結び付けるため、変換の集合からパターンの集合への対応関係を定める関手 F を導入する。

定義 8 (圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を次のように定義する。

- **対象の対応** : 任意の対象 $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、 T に含まれるすべての変換のもとで対称となるパターンの集合 $F(T) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させる。すなわち、

$$F(T) = \{p \in \text{Ob}(\mathcal{P}) \mid \forall f \in T, p = f(p)\} \quad (12)$$

とする。

- **射の対応** : 圏 $\mathcal{C}$ の射 $\iota : T_i \hookrightarrow T_j$ に対し、圏 $\mathcal{D}$ の射 $F(\iota) : F(T_j) \hookrightarrow F(T_i)$ を対応させる。

この関手 F は、「条件として課す変換の集合を大きくする（より高い対称性を要求する）ほど、それらすべてを満たすパターンの集合は小さくなる」という制約関係を表している。包含関係（すなわち射の向き）が逆転して対応付けられるため、関手 F は反変関手 (Contravariant Functor) となる。

次に、これとは逆方向の対応として、パターンの集合から変換の集合への対応関係を定める関手 G を導入する。

定義 9 (圏 $\mathcal{D}$ から圏 $\mathcal{C}$ への関手 G). 関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を次のように定義する。

- **対象の対応**: 任意の対象 $S \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し, S に含まれるすべてのパターンが対称となる変換の集合 $G(S) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を対応させる. すなわち,

$$G(S) = \{f \in \text{Aut}(\mathcal{P}) \mid \forall p \in S, p = f(p)\} \quad (13)$$

とする.

- **射の対応**: 圏 $\mathcal{D}$ の射 $\iota: S_i \hookrightarrow S_j$ に対し, 圏 $\mathcal{C}$ の射 $G(\iota): G(S_j) \hookrightarrow G(S_i)$ を対応させる.

この関手 G も同様に, 「対象とするパターンの集合を大きくするほど, それらすべてに共通して作用する変換の集合は小さくなる」という性質を表す反変関手である.

これら 2 つの反変関手 F と G の間には, パターンの対称性を特徴づける極めて重要な代数的構造である「随伴関係 (ガロア接続)」が成り立つ. この事実を以下の命題として定式化する.

命題 (関手 F, G 間の随伴関係). 任意の対象 $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および $S \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対して, 以下の Hom 集合間の全単射が存在する.

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, F(T)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G(S)) \quad (14)$$

これは, 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ の間に随伴関係 $F \dashv G$ が存在することを示す.

Proof. 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は半順序圏であるため, Hom 集合間の全単射は, 両集合が同時に空でない (射が存在する) ことと同じである. 関手 F, G の定義より, 射 $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, F(T))$ の存在と, 射 $\iota' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G(S))$ の存在は, いずれも「 $\forall p \in S$ と $\forall f \in T$ に対して $p = f(p)$ が成り立つ」ことと同じである. したがって, 両 Hom 集合は常に同時に単集合または空集合となり, 全単射 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, F(T)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G(S))$ が成立する. $\square$

この数学的な事実は, 要求する対称性の高さと, それを満たすパターンの集合との間に, 恣意的な仮説ではない必然的な制約構造が成り立っていることを裏付けている.

4. 総合議論

本研究では, パターンの良さ判断の情報処理の解明に向けた第一歩として, パターンとその対称性がなす構造を圏論的に定式化し, 理論的土台の構築を行った. 具体的には, 図形の配置と状態の変換を写像の可換図式を用いて厳密に定義し, パターンの集合の圏 $\mathcal{D}$ と変換の集合の圏 $\mathcal{C}$ という 2 つの半順序圏を構成した. さらに, これら両者の間に随伴関係が成り立つことを数理的に導出した. これにより, 「要求する対称性の

高さ」と「それを満たすパターンの集合の大きさ」の間に存在する制約構造を, 恣意的な仮説やパラメータに依存することなく演繹的に明らかにした.

今後の課題は, 本研究で導出された圏論的な対称性の制約構造と, 人間の主観的な「良さ」の評価とを結びつけることである. 既存の客観的指標を, 本研究で構築した圏 $\mathcal{C}$ や $\mathcal{D}$ 上の構造として再解釈することができれば, 先行研究の有用な知見を本枠組みの中で統合的に扱うことが可能となる. このような拡張的検討を進めることで, 法則の記述に留まっていた「良さ判断」という認知判断について, 数理的な根拠に基づく統合的モデルの構築を目指す.

謝 辞

本研究は科学研究費補助金基盤研究 A JP26H02527 と科学研究費補助金基盤研究 B(一般) JP23H0369 の補助を受けた.

文 献

- Algom, D., & Fitousi, D. (2025). Information Theory in Perception of Form: From Gestalt to Algorithmic Complexity. *Entropy*, 27 (4).
- Garner, W., & Clement, D. E. (1963). Goodness of pattern and pattern uncertainty. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 2 (5), 446–452.
- Phillips, S. (2021). A category theory principle for cognitive science: Cognition as universal construction. *Cognitive Studies: Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, 28 (1), 11–24.
- 濱田 治良・佐藤 裕・内海 千種・福田 T. スティーブ・福士 顕士・天野 要 (2024). 房条件での要素パターンに対する纏まり性 人間科学研究, *Journal of Human Sciences*, 32, 21–33.
- 日高 昇平・高橋 康介 (2021). ネッカーキューブはなぜあの立体に見えるのか 認知科学, 28 (1), 25–38.
- 小西 敏雄・岡野 大・緒方 秀教・芝田 安裕・天野 要・福士 顕士・濱田 治良・今井 四郎 (2003). パターンの良さ判断に関する変換群構造説 情報処理学会論文誌, 44, 2274–2283.
- 児玉 優子・三浦 佳世 (2011). パターンのよさと知覚的体制化 心理学研究, 82 (3), 277–282.
- 天野 要・大矢 拓也・荒木 章太・長内 祐・遠藤 慶一・岡野 大・小西 敏雄・福士 顕士・濱田 治良 (2013). パターンの良さ判断に与える准変換群構造の効果 情報処理学会論文誌, 54, 2254–2264.