

確率過程におけるランダム性と微分不可能性の関係

The relation between the randomness and un-differentiability in the Stochastic Process

佐藤 忠信 (京都大学・名誉教授; 神戸学院大学・研究員)
Tadanobu SATO (Kyoto University; Kobe-Gakuinn University)
E-mail: satotdnbseu@yahoo.co.jp

We discuss the relation between randomness and un-differentiability in the stochastic process. For that purpose we first discuss the discontinuity with respect to (wrt) the parameter of the stochastic process, which is composed of an iid generated random series from the probability density function (PDF) of the stochastic process. We first define the generalized Brownian noise but it is converted to the Brownian noise based on the central limit theorem. We define the stochastic differential equation for higher derivative of stochastic process

1. はじめに

不規則な現象を表現するのに、媒介変数 τ の連続関数となる確率過程を用いることが多い。確率変数は大文字で、そのサンプルは小文字で表現することが一般的であるので、本研究では $X(\tau)$ とすれば、確率過程であり、そのサンプル過程を $x(\tau)$ と表現する。確率過程はサンプル過程の集合として定義されるので、次式が成立する。

$$X(\tau) = \{x(\tau)\} \quad (1)$$

ここに、 $\{ \}$ は集合を表す記号である。離散確率過程を考える場合には、 τ を離散間隔 $d\tau$ で離散化し、 $\tau_l = l \cdot d\tau$ と置き、 $x_l = x(\tau_l)$ のように離散化すればよい。本研究では確率過程のランダム性とは何かを議論し、その特性を明らかにする。

2. 確率過程におけるランダム性の起源

確率過程のランダム性は、確率過程を規定する確率密度関数から独立同分布で生成される乱数値のランダム性に起因するものとする。そのため、乱数値の取り込み方によって、確率過程の特性が変わるので、それを明確にする。

2.1 乱数値から構成される確率過程の不連続性

θ を規定する確率密度関数 $p(\theta)$ から独立同分布で生成した乱数値を $\{\theta_l\}$ とし、離散点 τ_l での差分を次式で定義する。

$$d\theta_l = \theta_l - \theta_{l-1} \quad (2)$$

離散サンプル過程を $\{x_l\}$ とし、 $\{\theta_l\}$ に等置した過程を離散ランダム過程と名付け、それとその差分を次式のように定義する。

$$\{x_l\} = \{\theta_l\}; \{dx_l\} = \{x_l - x_{l-1}\} = \{d\theta_l\} \quad (3)$$

この場合、 $\tau_l = \tau_{l-1} + d\tau$ であり、 $d\tau \rightarrow 0$ のとき、 $\tau_{l-1} \rightarrow \tau_l$ であるが、乱数値の独立性から、 $\theta_l \neq \theta_{l-1}$ であり、 $dx_l \rightarrow 0$ とはならないので、ランダムサンプル過程 $x(\tau)$ は、 $d\tau \rightarrow 0$ の極限で、媒介変数の至る所で不連続になる。したがって、乱数値から構成される確率過程は、媒介変数の至る所で不連続な過程になる。

ランダム性を保持しながら、媒介変数に関する連続性を満たすには、 $d\tau \rightarrow 0$ で、 θ_l の振幅がゼロに漸近すれば良い。

この場合には、 $d\theta_l \rightarrow 0$ も自動的に満たされる。なお、 θ の確率密度関数 $p(\theta)$ が分散値を持つなら、中心極限定理から、 $p(\theta)$ は正規分布となるので、 $p(\theta)$ の標準偏差値が、 $d\tau \rightarrow 0$ で、ゼロに収束することが要請される。

2.2 媒介変数に関して連続な確率過程

媒介変数 τ に対して連続な確率過程の場合には、 $d\tau \rightarrow 0$ のとき、サンプル過程の増分に対し次式の成立することが要求される。

$$dx(\tau) \rightarrow 0 \quad (4)$$

これは、 $dx(\tau)$ が次式で定義される一般化されたブラウンノイズ過程 $dB(\tau, d\tau)$ に等しければ満たされる。

$$dB(\tau, d\tau) = \sigma(d\tau)^{1/p} \theta(\tau) \quad (5)$$

ここに、 $\theta(\tau)$ は τ において、正規化された確率密度関数 $p(\theta)$ より独立同分布で生成される乱数値である。なお、離散過程 dB_l

は次式で定義される。

$$dB_l = dB(\tau_l, d\tau) = \sigma(d\tau)^{1/p} \theta_l \quad (6)$$

ここに、 $\theta_l = \theta(\tau_l)$ である。これから、 dB_l には $p(\theta)$ から生成された独立同分布の乱数値 $\{\theta_l\}$ の包含されていることが分かる。

式(4)を満たすため、次式の成立する場合を考える。

$$dx(\tau) = dB(\tau, d\tau) \quad (7)$$

$dx(\tau)$ を離散化すると次式となる。

$$dx_l = dx(\tau_l) = x_l - x_{l-1} \quad (8)$$

したがって、式(7)の離散表現は次式となる。

$$dx_l = dB_l \quad (9)$$

式(9)で表現される離散サンプル過程では、 $d\tau \rightarrow 0$ のとき、式(6)より $dx_l \rightarrow 0$ が満たされるので、 $x(\tau)$ は τ に関して連続関数となるが、 $|dx(\tau)/d\tau| = \sigma\theta_l(d\tau)^{(1/p-1)} \rightarrow \infty$ であるので、 τ の至る所で、 $x(\tau)$ が微分不可能な関数になっている。このことは、媒介変数 τ に関して連続な確率過程にランダム性を付与すると、確率過程の一階導関数が τ に関して不連続になることを表している。これは、高階の導関数に媒介変数に関する連続性とランダム性を付与すると、一階高次の導関数に不連続性が発現することを意味している。本研究ではこの点を明確にする。

一般化ブラウンノイズの確率特性を明確にするために、 $d\tau$ より十分大きな任意の離散間隔 $\Delta\tau = K \cdot d\tau$ を考える。 $\Delta\tau$ の大きさが決められていれば、 $d\tau$ はいくらでも小さく取れるので、 K はいくらでも大きく取れることに注意してほしい。サンプル過程の大きな差分を Δx_l とすれば、媒介変数 τ に関する $x(\tau)$ の連続性から、 Δx_l は差分 dx_l の和として次式で表現できる。

$$\Delta x_l = \sum_{m=1}^K \sigma dx_{l-1+m} = \sum_{m=1}^K \sigma(d\tau)^{1/p} \theta_{l-1+m} \quad (10)$$

この場合、 Δx_l の分散値 $\sigma_{\Delta x}^2$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta x}^2 &= \sigma^2 E[(\Delta x_l)^2] \\ &= \sigma^2 (d\tau)^{2/p} E \left[\left(\sum_{m=1}^K \theta_{l-1+m} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)の右辺第3式は独立同分布の乱数値 θ_l の2次形式になっていること、ならびに式(12)の関係を考慮すれば、離散間隔が $\Delta\tau$ となる場合の、 $p(\theta)$ の分散値 $\sigma_{\Delta x}^2$ は式(13)で表される。

$$E[\theta_k \theta_l] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad (12)$$

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \sigma^2 E[(\Delta x_l)^2] = \sigma^2 K \cdot (d\tau)^{2/p} \quad (13)$$

なお、 K はいくらでも大きく取れるので、中心極限定理から、 $p(\theta)$ は正規確率密度関数となる。しかし、 $\sigma_{\Delta x}^2 = \sigma^2 \Delta\tau \cdot (d\tau)^{(p-2)/p}$ となるので、 $\sigma_{\Delta x}^2$ が $d\tau$ に依存する。それを避けるために、 $p = 2$ が要請され、 $\Delta\tau$ の大きさによらず、 $dB_l = \sigma\sqrt{\Delta\tau}\theta_l$ と表され、 $\sqrt{\Delta\tau}\theta_l$ は離散ブラウンノイズ²⁾に一致する。したがって、 $\{\theta_l\}$ が $N(0,1)$ から生成される乱数値になる。

2.3 確率微分方程式として定義される確率過程

確率過程 $X(\tau)$ のサンプル過程を $x(\tau)$ とすれば, その確率微分方程式³⁾としての表現は, 式(6)で $p=2$ で $\sigma=1$ としたブラウンノイズ²⁾を用いて, 式(14)で与えられる. なお, 確率微分方程式の解として与えられる $x(\tau)$ の媒介変数に対する連続性やその導関数の不連続性は発表会当日に議論する.

$$dx(\tau)=a(\tau, x(\tau))d\tau + b(\tau, x(\tau))dB(\tau, d\tau) \quad (14)$$

3. ブラウンノイズの媒介変数に関する高階導関数の不連続性

ここでは, 確率過程のランダム性とその導関数の不連続性との関係を明確にするために, サンプル過程 $x(\tau)$ の導関数に関する不連続性を議論する. そのために, $n=0, 1, 2, \dots$ とし, 次式のような n 階導関数を考える.

$$g^{(n)}(\tau) = d^n x(\tau)/d\tau^n \quad (15)$$

その上で, $g^{(n)}(\tau)$ の増分を次式で定義する.

$$dg^{(n)}(\tau) = (g^{(n)}(\tau) - g^{(n)}(\tau - d\tau)) \quad (16)$$

$n=0$ のときには式(15)や(16)は意味を持たないが, 次式が成立するものとする.

$$g^{(0)}(\tau) = x(\tau) \\ dg^{(0)}(\tau) = dx(\tau) = x(\tau) - x(\tau - d\tau)$$

この場合, $(n+1)$ 階導関数は次式で定義される

$$g^{(n+1)}(\tau) = dg^{(n)}(\tau)/d\tau \quad (17)$$

なお, $g^{(n)}(\tau)$ と $dg^{(n)}(\tau)$ の離散表現は次式で与えられる.

$$g_l^{(n)} = g^{(n)}(\tau_l) \quad (18)$$

$$dg_l^{(n)} = dg^{(n)}(\tau_l) = g_l^{(n)} - g_{l-1}^{(n)} \quad (19)$$

さらに, $(n+1)$ 階導関数の離散表現を次式で近似する.

$$g_l^{(n+1)} \cong (g_l^{(n)} - g_{l-1}^{(n)})/d\tau \quad (20)$$

ここで, $dg^{(n)}(\tau)$ の離散過程 $dg_l^{(n)}$ が, 式(6)で定義された一般化離散ブラウンノイズに一致する場合を考える.

$$dg_l^{(n)} = g_l^{(n)} - g_{l-1}^{(n)} = dB_l = \sigma\theta_l(d\tau)^{1/p} \quad (21)$$

この場合には, $d\tau \rightarrow 0$ のとき, $dg_l^{(n)} \rightarrow 0$ が満たされるので, $g^{(n)}(\tau)$ 過程が媒介変数 τ の連続関数になっており, ランダム性の包含されていることが分かる. 一方, $g^{(n+1)}(\tau)$ の離散過程である $g_{l+1}^{(n)}$ の近似値は次式で与えられる.

$$g_{l+1}^{(n+1)} \cong (g_l^{(n)} - g_{l-1}^{(n)})/d\tau = \sigma\theta_l(d\tau)^{(1/p-1)} \quad (22)$$

したがって, $d\tau \rightarrow 0$ のとき, $|g^{(n+1)}(\tau)| \rightarrow \infty$ となるので, $(n+1)$ 階導関数は媒介変数 τ の至る所で不連続な関数になることが分かる. したがって, 以下の公理が導かれる.

公理: 一般化ブラウンノイズによって定義される確率過程のランダム性は確率過程を規定する確率密度関数から独立同分布で生成される乱数列に依存する. なお, n 階導関数の増分を一般化ブラウンノイズとする確率過程は, 媒介変数の連続過程となるが, $(n+1)$ 階導関数は媒介変数の不連続過程になる. これは, 一般化ブラウンノイズのランダム性と媒介変数に対する不連続性とは切り離して議論できないことを意味している.

4. 高階導関数の確率微分方程式としての表現

高階微係数過程を $G^{(n)}(\tau)$ とし, 式(6)で $p=2$ で $\sigma=1$ としたブラウンノイズを用いて, サンプル過程の導関数 $g^{(n)}(\tau) = d^n x(\tau)/d\tau^n$ の確率微分方程式を次式で定義する.

$$dg^{(n)}(\tau) = \alpha(\tau, g^{(n)}(\tau))d\tau + \beta(\tau, g^{(n)}(\tau))dB(\tau, d\tau) \quad (23)$$

当然であるが, $G^{(n)}(\tau) = \{g^{(n)}(\tau)\}$ と表現される. なお, 式(23)で, $\alpha(\tau, g^{(n)}(\tau)) \equiv 0$ と $\beta(\tau, g^{(n)}(\tau)) \equiv 1$ として, それを

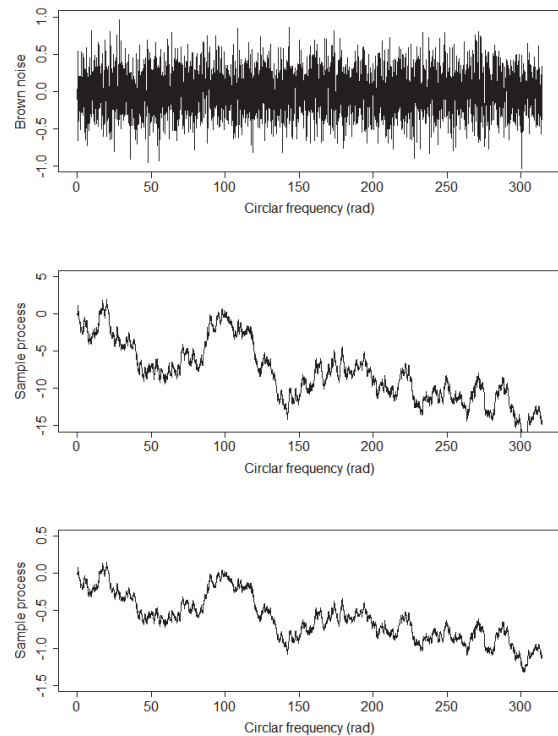


Fig.1 Three stochastic processes

The top figure is the Brownian noise process; $\sqrt{d\tau}\theta_l$

The middle figure is the cumulative sum of $\sqrt{d\tau}\theta_l$

The bottom figure is the cumulative sum of $\theta_l d\tau^{1.5}$

離散化すれば, $p=2$ で $\sigma=1$ とした式(21)に一致する. なお, ミルシュタイン近似を用いた, $g^{(n)}(\tau)$ に対する確率微分方程式(23)の数値計算例は発表会当日に示す. なお, 式(23)に基づいた, $g^{(n)}(\tau)$ の確率密度関数の導出と媒介変数に関する連続性や $g^{(n+1)}(\tau)$ の不連続性は今後の課題である.

$p=2$ で $\sigma=1$ の場合は, $dB_l = \sqrt{d\tau}\theta_l$ となり離散ブラウンノイズになるので, それを Fig.1 の最上段に描画した. $\sqrt{d\tau}\theta_l$ をサンプルの差分 $d x_l$ に等置すると, $d x_l = \sqrt{d\tau}\theta_l$ となるので, $d x_l$ の累積和で x_l 過程求めたのが Fig.1 の中段図である. サンプル過程の媒介変数に関する一階導関数の離散増分過程 $dg_l^{(1)}$ を離散ブラウンノイズ $\sqrt{d\tau}\theta_l$ に等置すると, $dg_l^{(1)} = \sqrt{d\tau}\theta_l$ となるので, $d x_l = (d\tau)^{1.5}\theta_l$ として, $d x_l$ の累積和で求めた x_l 過程を Fig.1 最下段に描画した. 中段と下段に描画した過程は媒介変数の連続関数であるが, ランダム性を有しており, その過程は相似になることが分かる.

謝辞

本研究は, 科学研究費—基盤研究 C(#21K04242)の補助を受けて, 実施したものである.

参考文献

- 1) Lin, Y. K. : *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-hill Inc. , 1967.
- 2) Karatzas, I. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York Inc., 1988.
- 3) Mikosch, T. : *Elementary Stochastic Calculus with Fainnce in View*, World Scientific Publishing Co, Pte. Ltd., 1998