

テーパー形状と中空断面が自重座屈耐性に与える影響 Effect of Tapered Form and Hollow Cross-Section on Self-buckling Resistance

金浜 瞳也 (北大・工) 佐藤 太裕 (北大・工)

Tohya KANAMAHARA, Hokkaido University

Motohiro SATO, Hokkaido University

E-mail: t.knhm108@gmail.com

Most plants have the tapered form because they all are required the rational resistance properties to the gravity. In addition to the tapered form, the hollow cross-section can be expected to another effective method. However, many tall plants don't have the hollow cross-section, and only have tapered form. The purpose of this study is to clarify the effect of tapered form and hollow cross-section on self-buckling resistance. We modeled plants as cylinder with various tapers and cavities. The theoretical solution of critical height was derived by effectively using the boundary and mechanical conditions. As a result, in the volume constant conditions, the effect of tapered form on the self-buckling resistance is almost same as the effect of the hollow cross-section.

1. はじめに

自然界の植物は、等しく重力の影響を受けている。そのため、植物たちはそれぞれの生育環境に適合しつつ、光合成のために高く大きく成長するべく、重力に対して効率よく抵抗する術を身に着けなくてはならない。その結果として、植物の形態は驚くほどに多種多様である。しかしながら、広く植物を観察してみると、根元から先端にかけて徐々に細くなっていくテーパー(先細り)形状をはじめとして、種をまたいで共通した形状の特徴が存在する¹⁾。このような植物たちを貫く共通則の存在は、全てに等しく作用する重力に起因していると推測できる。

植物の中でも特に高く大きく成長する樹木は、密実な断面と重い枝葉を有しているのにも関わらず、幹のテーパー形状によって巧みに重量物を配分することにより、重力に対する抵抗性を高め、自重座屈に対する限界高さを飛躍的に向上させている。実際に、テーパー形状を有する円錐台形の場合、テーパーが無い円柱形の時と比べ、自重座屈に対する限界高さを約 1.5 倍まで引き上げることが明らかにされている¹⁾。

テーパー形状のほかに限界高さを大きくするために有効な戦略の一つと考えられるものは、「幹の断面を中空にすること」である。断面の中心部付近は曲げ応力が小さいため、この部分を空洞にして軽量化を図ることは、高さを稼ぐという目的を省材料で達成するための非常に有効な戦略である。しかしながら、人々の身長を超えるほど高く成長する植物は、テーパー形状のみを有するものがほとんどであり、断面が中空であるものは極めて少ない。このことは、高さを必要とする植物が自重座屈耐性を高めるためには、断面を中空にするよりも、テーパー形状を導入する方が効果的であることを示唆している。これを工学的見地から洞察することは、植物が集積してきた「効率のよい重力抵抗機構をはじめとする力学的叡智」を明らかにするだけでなく、「植物形態の成り立ちに関する自然科学的な知見」を解明することに繋がると考えられる。

本研究は、植物形態の自重座屈に対する力学的合理性を明らかにするために、テーパー形状や中空断面について、それぞれが限界高さに与える影響を解明することを目的とする。樹木を内径および外径が一次式で変化する片持ち梁としてモデル化し、力のつり合いからたわみ角に関する微分方程式を導出してその一般解を求め、適当な境界条件および機械的制約条件を考慮することにより、任意の空洞を有する円錐台モデルの限界高さを定式化する。

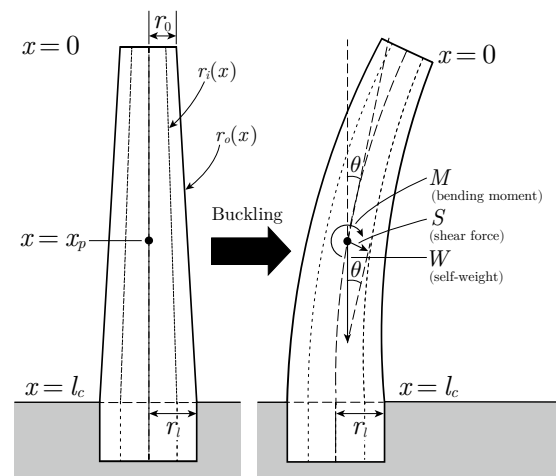


Fig.1 Calculation model

2. 中空円錐台モデルにおける限界高さの定式化

本研究では、Fig.1 に示すような半径が高さ方向に一次関数の形で変化する中空円錐台の片持ち梁について、自重座屈に対する限界高さを導出する。自由端側 ($x=0$) の外半径を r_o 、固定端側 ($x=l_c$) の外半径を r_l と表記し、自由端半径は固定端半径に比例するものと考え、その比例定数をテーパー比 $c (= r_o/r_l)$ として定義すると、外半径 r_o は次式で表される。

$$r_o(x) = \left\{ \frac{(1-c)}{l}x + c \right\} r_l = (\lambda x + c) r_l \quad (1)$$

なお、外半径 r_o に対する内半径 r_i の比を中空比 $\alpha (= r_i/r_o)$ として定義し、これは位置 x によらない定数とする。

ここで、任意点での力のつり合いから、定式化の簡単のためにたわみ角 θ が微小であるものとすれば、せん断力 $S(x)$ は次式で得られる。

$$S(x) \approx \beta \gamma \pi (1 - \alpha^2) (\lambda x + c)^2 r_l^2 \theta \quad (2)$$

ここに、 γ は単位体積重量である。係数 β は点 P より上側の中空円錐台の体積 (V_1) を点 P における半径 r_i, r_o を持つ円筒の体積 (V_2) を用いて表すための体積補正係数 ($\beta = V_1/V_2$) であり、ここでは簡単のために x によらない定数とする。次に、はりの微分方程式から曲げモーメント $M(x)$ を求め、式 (2) のせん断力 $S(x)$ との関係を用いると、たわみ角に関する次の線形二階微分方程式が得られる。

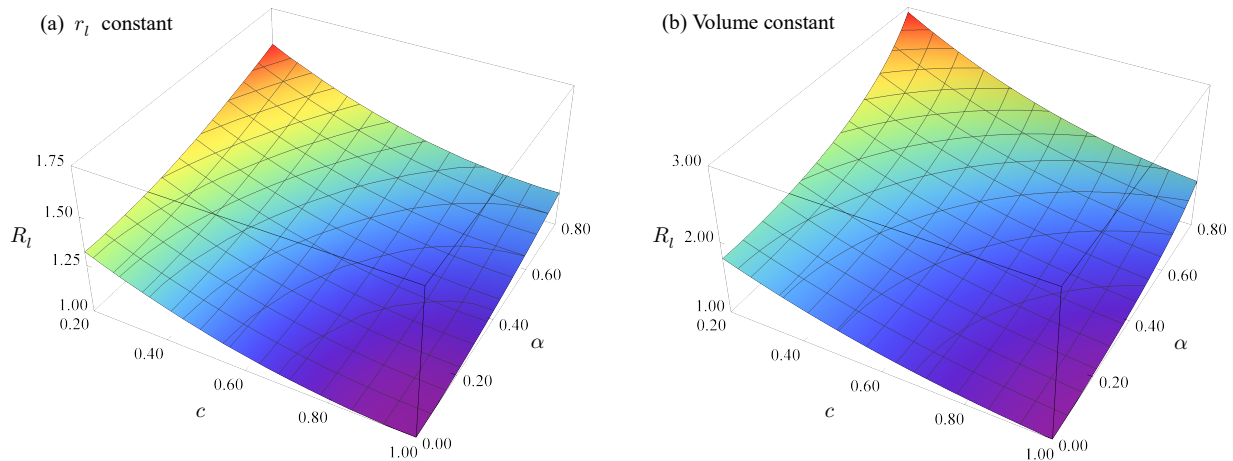


Fig.2 Effect of tapered form and hollow cross-section on critical height ratio

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{4A}{(Ax+c)} \frac{d\theta}{dx} + \frac{4\beta\gamma x}{Er_l^2(1+\alpha^2)(Ax+c)^2} \theta = 0 \quad (3)$$

ここに、 E は弾性係数を表す。式(3)の微分方程式に適当な変数変換 ($\xi(x) = \omega(Ax+c)$) を行うことにより、解くべき最終的な微分方程式が得られる。これを解いて、次に示す一般解が得られる。

$$\theta(\xi) = \frac{1}{8} C_1 \xi^{\frac{1}{2}(\eta-3)-\frac{1}{2}\eta} \Gamma(1+\eta) J_\eta(4\sqrt{\xi}) + \frac{1}{8} C_2 \xi^{-\frac{1}{2}(\eta+3)-\frac{1}{2}\eta} \Gamma(1-\eta) J_{-\eta}(4\sqrt{\xi}) \quad (4)$$

ここに、 C_1 および C_2 は任意定数、 $\Gamma(x)$ は Gamma 関数、 $J_\eta(x)$ は次数 η の第一種 Bessel 関数を表す。

いま、式(4)の一般解は、著者らが導出した中実な円錐台モデルにおける一般解¹⁾と同様であるため、その解法を用いて限界高さの導出を試みる。まず、式(4)の一般解は微分が困難であるから、固定端側の境界条件のみを適用することを考える。Bessel 関数の性質を利用し、 η が整数に限りなく近いとすると、式(4)の右辺第一項と第二項は、同一の ξ で固定端境界条件を満足する。この性質を利用し、変数変換式より次の限界高さ方程式が得られる。

$$l_c = f(c)f(\alpha) \left(2 \frac{E}{\gamma} r_l^2 \right)^{1/3} = R_l \left(2 \frac{E}{\gamma} r_l^2 \right)^{1/3} \quad (5)$$

ここに、 R_l は半径が高さ方向に一定で中実な円柱モデルに対する限界高さ比を表す。また、 $f(c)$ はテーパー比 c のみで変化するテーパー関数、 $f(\alpha)$ は中空比のみで変化する関数であり、それぞれ次式で与えられる。

$$f(c) = (1-c) \left(\frac{j_{\eta,1}^2}{32\beta} \right)^{1/3} \quad (6)$$

$$f(\alpha) = (1+\alpha^2)^{1/3} \quad (7)$$

式(6)の $j_{\eta,1}$ は、次数 η の第一種 Bessel 関数における一番目のゼロ点を表す。テーパー関数 $f(c)$ は、著者らの中実な円錐台モデルの定式化結果より、次のように書くことができる。

$$f(c) \approx c^{-1/6} \quad (8)$$

式(7)、(8)を式(5)に適用すると、中空円錐台における限界高さ得られる。以上より、限界高さはテーパー比や中空比によらず、固定端半径 r_l の2/3乗に比例することが分かる。

3. テーパー形状と断面の中空化による影響

Fig.2は、中空比 α およびテーパー比 c が限界高さに与える影響を示す。縦軸には「断面が中実な円柱モデル」に対する「任意の中空比 α およびテーパー比 c を有する中空円錐台モデル」の限界高さ比、横軸にテーパー比 c 、奥行き方向に中空比 α を取って示したものである。

まず、固定端半径 r_l を一定とした場合の限界高さ比 (Fig.2 (a)) を見ると、断面の中空化よりも、テーパー形状を採用する方が、限界高さをより飛躍的に高めることが分かる。また、体積一定条件を導入した場合 (Fig.2 (b)) では、テーパー形状と断面の中空化は、限界高さ比にほとんど同程度の影響を与えていると言える。断面の中空化はつぶれや局部座屈への耐性が悪化してしまうこと²⁾を踏まえると、座屈耐性に大きな差異が無いのであれば、テーパー形状を採用する方が安全であり、その結果として、数多くの植物がテーパー形状を有しているのではないかと考えられる。例外的にテーパー形状と中空断面を複合的に有する自然界の竹は、断面の中空化により生じるデメリットを節の導入で低減し、飛躍的な限界高さの向上を可能にしているのではないかと推測できる。

4. まとめ

本研究では、自立する植物が有していると考えられる力学的合理性を明らかにするために、任意の空洞を有する円錐・円錐台・円柱モデルに統一的に適用可能な限界高さ式を導出した。その結果として、体積一定条件下におけるテーパー形状と断面の中空化がもたらす限界高さへの影響は、ほとんど同程度であることが分かった。このことは、多くの植物が断面の中空化により生じる力学的なデメリットを考慮し、ほぼ同様の自重座屈耐性が得られるテーパー形状を選択している可能性を示唆するものである。

謝辞

本研究は科研費基盤研究(A) (18H03818, 研究代表者: 佐藤太裕) により実施されました。この場をお借りし関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 金浜瞳也, 藤村高憲, 佐藤太裕: テーパーを有する樹木の自重座屈に対する限界高さの導出, 土木学会論文集 A2, 77, pp.62-71, 2021.
- 2) C. R. Calladine: Theory of Shell Structures, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.