

深さ方向の非定常性を考慮した 3 次元空間分布推定と Kronecker 積を用いた計算効率の向上 3D spatial distribution estimation considering nonstationary in the depth direction and improvement of calculation efficiency by Kronecker product

富澤 幸久 (東京都市大・総合理工) 吉田 郁政 (東京都市大・都市工学科) 大竹 雄 (東北大・工)
Yukihisa TOMIZAWA, Tokyo City University
Ikumasa YOSHIDA, Tokyo City University
Yu OTAKE, Tohoku University
E-mail: ktskkmn@gmail.com

Three-dimensional spatial distribution estimation of the geotechnical property is performed on the measured data using Gaussian process regression, and a blind test is performed to examine the accuracy. When the non-stationarity of the standard deviation of the random field is considered in the depth direction, the improvement of estimation accuracy is confirmed than the stationary case. It is also shown that the calculation cost is greatly reduced by using Kronecker product when estimating the parameters of the random field by the maximum likelihood method.

1. はじめに

構造物の杭や基礎の設計、堤防や斜面などの地盤構造物の安全管理を行う上で地盤物性値の 3 次元空間分布を正確に把握することは非常に重要である。空間分布推定手法として、地盤工学の分野では地球統計学の中心的な手法であるクリギングが数多く用いられている。一般的な回帰理論で近年注目されているガウス過程回帰 (Gaussian process regression, GPR) はクリギングを数学的に包括した手法である。これらは確率論に基づく手法であり、推定値の不確定性を評価できる。Yoshida et al.¹⁾ は確率場を重ね合わせた GPR による地盤物性値の 3 次元空間分布推定手法を提案している。本手法では確率場の標準偏差などのパラメータを定常としているが、それらは深さや地点ごとに異なることが考えられる。そのため、非定常性を考慮することでより正確な推定が期待できる。こうした空間分布推定問題において、観測点が膨大なデータで検討を行う際、計算コストが障害となるが、ラティス状のデータに対しては水平方向と鉛直方向に分離して Kronecker 積を用いて計算することで計算効率の向上が期待できる²⁾。

本研究では、実測データを用いた GPR による 3 次元空間分布推定手法について、1) 深さ方向の非定常性の考慮、2) Kronecker 積の導入、による改良を行った。数地点でのブラインドテストによる推定値の精度評価を通して、1) 標準偏差について深さ方向の非定常性を考慮した場合と定常の場合、2) 最尤法で確率場のパラメータを推定する際に Kronecker 積を使用する場合としない場合での計算時間、の比較を行う。

2. GPR を用いた推定の定式化

GPR を用いた推定値ベクトル $\hat{\mathbf{x}}_2$ の推定式を式(1)に示す。

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}_{12}^T \mathbf{M}_{11}^{-1} \{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{x}}_1\} \quad (1)$$

ここで、添え字 i, j は 1 を観測地点、2 を推定地点とし、 $\bar{\mathbf{x}}_i$ は平均ベクトル、 $\mathbf{M}_{ij}$ は共分散行列、 $\mathbf{z}$ は観測量ベクトルである。本研究では、 $\bar{\mathbf{x}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{x}}_2$ は観測量ベクトルの平均値と仮定する。ここで、各ボーリングにおいて深さ方向に同一の座標でデータが得られている、すなわちラティス状に配置されていると仮定する²⁾。全データの観測地点数 n は水平方向地点数 n_h と鉛直方向地点数 n_v の積で表せる。ある 2

点の座標値 $\mathbf{s}$ と $\mathbf{s}'$ の 2 点間の水平方向距離 d_h 、鉛直方向距離 d_v はそれぞれ以下の式より求める。

$$d_h = \sqrt{(s_1 - s'_1)^2 + (s_2 - s'_2)^2}, \quad d_v = |s_3 - s'_3| \quad (2)$$

ここで、座標値 s_j と s'_j の添え字 j は、1, 2 を水平方向、3 を鉛直方向とする。各ボーリングで同じ深さ s_{3,i_v} 、 $i_v=1, n_v$ とし、各深さの標準偏差 σ_{i_v} は式(3)より算出する。

$$\sigma_{i_v} = \sqrt{\frac{1}{n_h - 1} \sum_{i_h=1}^{n_h} (z_{i_h, i_v} - \bar{x}_1)^2} \quad (3)$$

これらを用いて、共分散値は式(4)より求める。

$$\text{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sigma_{i_v} \sigma_{i'_v} \rho(d_h | \delta_h) \rho(d_v | \delta_v) \quad (4)$$

ここで、添え字 h, v はそれぞれ水平方向と鉛直方向を表し、 $\rho(d|\delta)$ は自己相関関数、 δ は scale of fluctuation (SOF) である。自己相関関数は水平方向と鉛直方向の積と仮定する。自己相関関数のモデルは式(5)の Whittle-Matérn³⁾ を用いる。

$$\rho(d|\delta) = \frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(v+0.5) d}{\Gamma(v) \delta} \right)^v K_v \left(\frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(v+0.5) d}{\Gamma(v) \delta} \right) \quad (5)$$

ここで、 Γ はガンマ関数、 v は smoothness parameter (SP)、 K_v は次数 v の第 2 種ベッセル関数である。推定値の共分散行列 $\mathbf{P}_{22}$ を以下の式(6)より求め、推定値の分散は $\mathbf{P}_{22}$ の対角成分から算出する。

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \quad (6)$$

推定に使用する確率場のパラメータは最尤法を用いて算出する。式(7)に示す負の対数尤度を最小化するように BFGS 法で最適化を行い、パラメータを算出する。

$$-\ln L = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{M}_{11})^{-1} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \ln |\mathbf{M}_{11}| + \frac{n}{2} \ln(2\pi) \quad (7)$$

観測地点がラティス状に配置されている場合、観測地点同士の共分散行列の逆行列 $\mathbf{M}_{11}^{-1}$ は式(8)に示す Kronecker 積を用いて計算できる²⁾。

$$\mathbf{M}_{11}^{-1} = (\mathbf{M}_{h,11})^{-1} \otimes (\mathbf{M}_{v,11})^{-1} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{M}_{h,11}$ は地点数 n_h の水平方向の共分散行列、 $\mathbf{M}_{v,11}$ は地点数 n_v の鉛直方向の共分散行列である。

3. 実測データに対する GPR を用いた推定の一例

検討に使用する実測データは、International Society of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering の TC304 データベース⁴⁾ から入手した。データは 40 地点のコーン貫入試験で

得られた先端抵抗値(q_t)である。Fig. 1 にデータの観測地点、ブライントテスト地点、推定断面の平面図を示す。ラティス状のデータとするため、40 地点全てで深さ 0.2 から 4.5m まで 0.05m 間隔³⁾, 87 点の観測点を使用する。Fig. 1 の 5 番の列では水平方向 1m 間隔でデータが得られており本研究では D51-D54 でブライントテストを行う。推定断面は a-a' の深さ 0.2 から 4.5m の断面である。Fig. 2 に、全観測データから算出した各深さの標準偏差と、例として B5-E5 の 4 地点の観測データを示す。標準偏差は深度 1m で大きくなり、深くなるにつれて小さくなっている。

Table 1 に非定常性を考慮した場合と定常の場合の最尤推定値と計算時間を示す。計算時間は Kronecker 積を使用した場合としない場合 (conventional) を示しているが、これらの最尤推定値は一致することを確認している。非定常では定常より最適化対象のパラメータ数が 1 個少ないため、計算時間が短い。最適化手法を用いる場合の計算時間は初期値に大きく依存するためこれらの決め方も重要である。Kronecker 積を使用した場合、計算時間が約 1/300 となっており、計算効率が非常に向上した。Fig. 3 に 4 地点で行ったブライントテストの内、D51, D52 地点の結果を示す。図中には真値、非定常と定常の場合の推定値、推定の不確定性を表す 95%信頼区間を示している。非定常の場合、変動が大きい箇所では信頼区間の幅が広く、小さい箇所では信頼区間幅が狭まっており、真値の分布概ね包括している。Fig. 4 に非定常の場合の推定断面の推定を示す。

4. おわりに

本研究では、実測の地盤データに対して GPR で 3 次元空間分布推定を行い、ブライントテストで真値と比較した。推定の際、標準偏差について深さ方向の非定常を考慮することで定常の場合と比較して良好な推定となった。最尤法で確率場のパラメータを推定する際、Kronecker 積を使用することで計算効率が大幅に向上した。今後、他のパラメータや水平方向に非定常性を考慮した検討、欠損など非ラティス状のデータで Kronecker 積を使用するための検討を行う。

参考文献

1) Yoshida et al.: Estimation of trend and random components of conditional random field using Gaussian process regression, *Computers and Geotechnics*, Vol.136, 2021.
2) Xiao et al.: CPT-based probabilistic characterization of three-dimensional spatial variability using MLE, *J. Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 144(5), 2018.
3) Ching et al.: Identification of sample path smoothness in soil spatial variability, *Structural Safety*, Vol.81, 2019.
4) International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering : TC304 databases, 2022. 2.6. 閲覧 , <http://140.112.12.21/issmge/tc304.htm>.

Table 1 MLE and calculation time.

	SD	SOF		SP	ML calculation time[sec]	
		horizontal	vertical		conventional	Kronecker Product
non-stationarity	-	3.93	0.99	0.88	32721	108
Stationarity	1.38	3.75	0.69	0.91	67248	229

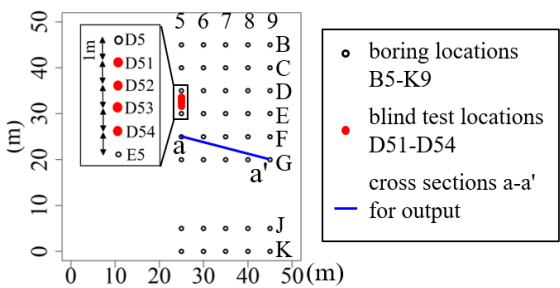


Fig. 1 Plan view of observation data and estimated position.

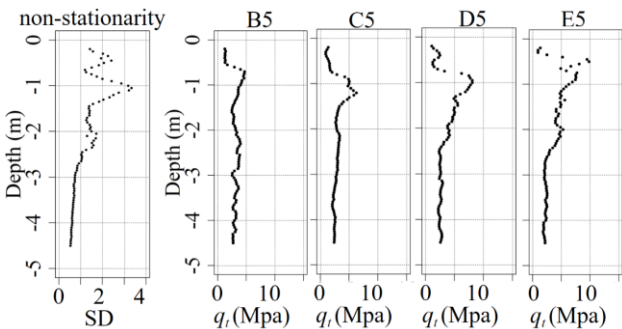


Fig. 2 SD of each depth and observation data at several points.

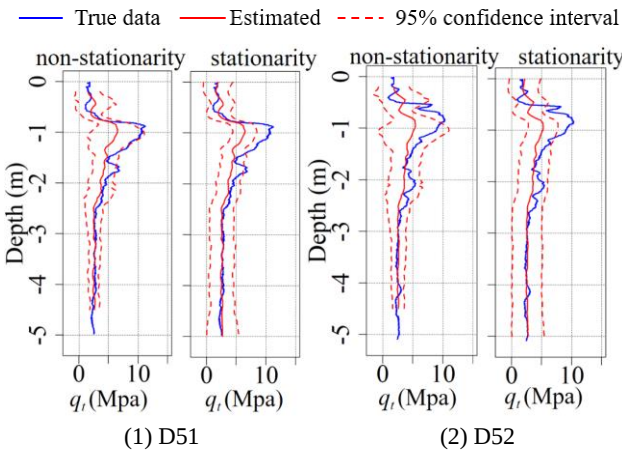


Fig. 3 Comparison of estimates and true values for cases non-stationarity and stationarity.

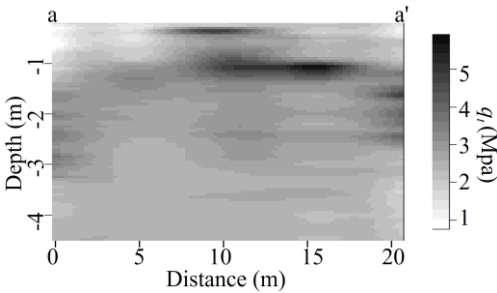


Fig. 4 Spatial distribution estimation of cross-sections a-a'.