

ガウス過程回帰を用いた適応型代理モデルによる効率的な限界状態確率の推定 Efficient Estimation of Limit State Probability by Adaptive Surrogate Model using Gaussian Process Regression

中村 朋佳 (東京都市大・総合理工) 吉田 郁政 (東京都市大・都市工学科) 大竹 雄 (東北大・工)
 Tomoka NAKAMURA, Tokyo city University
 Ikumasa YOSHIDA, Tokyo City University
 Yu OTAKE, Tohoku University
 E-mail: thomoka1226@gmail.com

This study discusses the points for improving the AK-MCS proposed by Echard et al. (2011) which is an efficient method with active surrogate model of limit state function for calculating limit state probabilities. The proposed method introduces Importance Sampling without using design points, and is applied to an 8-dimensional consolidation settlement problem to calculate the limit state probability. It is confirmed that the probability is calculated with small number of function call.

1. はじめに

信頼性評価手法, すなわち限界状態超過確率 (以下, 限界状態確率) の効率的計算法については長い歴史があり, 様々な方法が提案されてきた. 近年, 計算機能力の向上に伴い Monte Carlo Simulation (MCS) を用いた方法が注目され, なかでも Echard et al.によって提案された適応型代理モデルと MCS を組み合わせた AK-MCS¹⁾(Active learning reliability method combining Kriging and MCS)が注目されている. この 10 年で AK-MCS の手法の改良に関する非常に多くの論文が発表され, それらの SOA レポートも複数報告されている^{2),3)}. 改良のひとつとして通常の MCS ではなく設計点 (破壊点) まわりの Importance Sampling (IS) を使う考え方があるが, 設計点を探索する旧来型の信頼性評価手法が必要になること, 多数設計点がある場合に手順が煩雑になる, 微分不可能な問題には適用できないなどの課題がある.

本研究では Echard et al.による例題の再現を行い, その改良に向けての問題点を指摘するとともに, 設計点を使わない IS の導入, 及びその場合の課題とその改良について報告する. さらに, 改良した方法を用いて 8 次元圧密沈下問題に適用して限界状態確率を算定した例を報告する.

2. AK-MCS 及び学習関数 LF の概要

実問題を扱う場合, 限界状態の評価は有限要素法など計算時間を要する場合が多く, この限界状態評価(function call, FC)の回数を減らすことが計算効率の向上に重要である. AK-MCS は Kriging を用いて限界状態関数の代理モデルを構築して確率計算を行う方法である. 以降, MCS による確率計算に使用する点を”粒子”, 代理モデル構築のための FC 点を”サンプル”とする. AK-MCS において大変重要な役割を担っているのが学習関数 $U(x)$ (Learning function, 以下 LF) である. LF は Kriging で推定された限界状態関数値の平均 $\mu_g(x)$ とその標準偏差 $\sigma_g(x)$ の比で表される.

$$U(x) = \frac{\mu_g(x)}{\sigma_g(x)} \quad (1)$$

適応型学習では効率的に追加点の探索を行うために, LF の値が最も小さい粒子, すなわち限界状態に近く不確実性が大きい点を次のサンプル, つまり FC の点とする. 追加されたサンプル, その限界状態関数値を基に Kriging による代理モデルを更新する. この手順を繰り返すことで代理モデルを高精度化する. 代理モデルによる計算は大変軽い

ので 100 万など多くの粒子を用いて限界状態確率を算定することができる.

3. 変数 2 個の例題を対象とした限界状態確率の推定

Echard et al.による変数 2 個の例題¹⁾について示す. 限界状態関数を式(2)に示す.

$$g(x_1, x_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}}; \\ 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}}; \\ (x_1 - x_2) + \frac{7}{\sqrt{2}}; (x_2 - x_1) + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \quad (2)$$

変数 x_1, x_2 は標準正規分布に従う確率変数である. この例題は破壊領域が 4 箇所存在する問題であり, 多くの論文でベンチマーク的に使用されている. Fig. 1 に 100 万の粒子数で計算した例を示す. まず, 最初に MCS のための 100 万の粒子を発生させる. 別途, 代理モデル計算のための初期サンプル 12 個を発生させて初期の代理モデルを作成する. 代理モデルを用いて 100 万点の LF を評価して最も小さな数値となった点を次のサンプルとして限界状態関数値を算定し, 代理モデルを更新する. この手順を繰り返すことで, 徐々に限界状態関数の代理モデルを更新, 限界状態確率の高精度化を行う. Fig. 1 は FC が 101 回の時の代理モデルと真の限界状態超過の境界を表している. 粒子が発生されている付近の境界はほぼ正確に求められている. 100 万の粒子数で計算した場合, 2200 個程度が限界状態超過領域 ($P_f=0.00223$) に存在している. より小さな限界状態確率を算定するにはより多くの粒子が必要となり, その計算時間も障害となる. そのため設計点の付近で粒子を発生させ

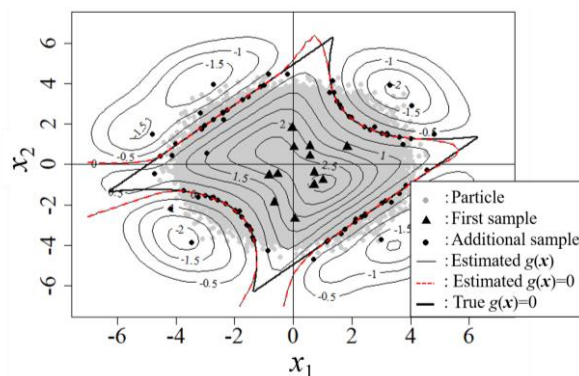


Fig. 1 AK-MCS using 1,000,000 particles.

る AK-IS⁴⁾ が提案されている。しかし、前述のようにアルゴリズムが複雑、適用に制限があるなどの問題がある。

4. 提案手法の概要

提案手法として事前情報に基づいて粒子を発生させるのではなく、一様分布に従い粒子を発生させて事前情報に基づき重みを与える重要度サンプリングを導入する。一様分布の範囲は事前情報から判断して、例えば標準偏差の5倍を含む範囲などを設定する。Fig. 2 に1万の粒子を用いた例を示す。学習過程の最初のうちは順調に境界付近にサンプルが選ばれるが、徐々に真の限界状態境界の内側あるいは外側に小さな島状の境界が現れて、真の境界と離れた点を LF が選ぶようになる。これは限界状態関数の代理モデルが振動するような分布となり、局所的に境界が現れるためである。この問題を回避するためには代理モデルに適切なトレンドモデルを導入すればよい。そこで、Yoshida et al.⁵⁾ による複数の確率場の重ねあわせを用いた GPR を代理モデルとして採用する。2つの確率場でモデル化して代理モデルを作成したところ、Fig. 3 に示すように良好な結果が得られた。Fig. 4 に学習過程における限界状態確率の推移を示す。80-100 回程度のサンプル数 (FC の回数) で収束しており、1万の粒子数でも安定して限界状態確率を算定することができる。

5. 圧密沈下問題を対象とした限界状態確率の推定

Fig. 5 に対象とした盛土基礎地盤を簡略化した断面図を示す。盛土中心直下の地表から+0.8m 地点を S1 とする。数値解析モデルとして土/水連成有限要素法(以下 FEM)を使用した。計算条件等の詳細は本編で示すとしてここでは紙面の都合上省く。8つのパラメータについて所定の範囲でそれぞれ一様分布を仮定し、2万粒子の MCS を実施した。

S1 地点の沈下量が 1.52m を超過する確率は 0.02 であった。これを提案手法で限界状態確率を計算した結果を Fig. 6 に示す。MCS による確率 $P_f=0.02$ で標準化した量を縦軸の Normalized Pf として示した。およそ 70 回程度の計算で 95% 信頼幅に落ち着いている。

6. まとめ

確率計算のための粒子を事前情報から発生させるのではなく一様分布に従うサンプリング分布で発生させることで限界状態確率算定の計算効率の向上を試みたところ、一定の効果を確認することができた。本編では他の分布の有効性やさらに停止則についても検討結果を報告する。

参考文献

- 1) Echard et al.: AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, *Structural Safety*, Vol.33, No.2, pp.145-154, 2011.
- 2) Teixeira et al.: Adaptive approaches in metamodel-based reliability analysis: A review, *Structural Safety* 89, 102019, 2021.
- 3) Moustaphaet et al.: Active learning for structural reliability: Survey, general framework and benchmark, *Structural Safety*, 102174, 2022.
- 4) Echard et al.: A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models, *Reliability Engineering & System Safety* 111, pp.232-240, 2013.
- 5) Yoshida et al.: Estimation of trend and random components of conditional random field using Gaussian process regression, *Computers and Geotechnics*, Vol.136, 2021.

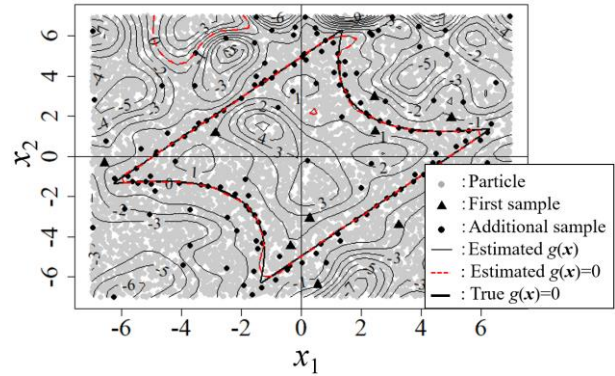


Fig. 2 The proposed method using GPR with single random field.

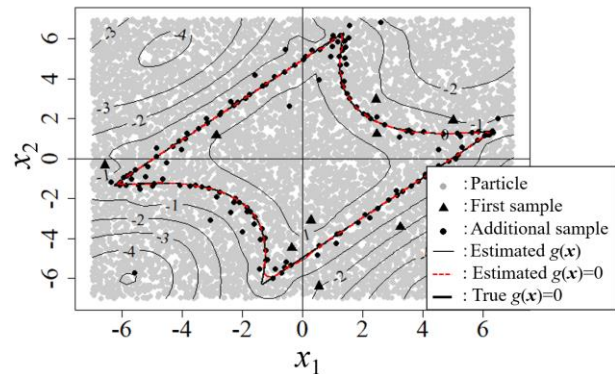


Fig. 3 The proposed method using GPR with two random fields.

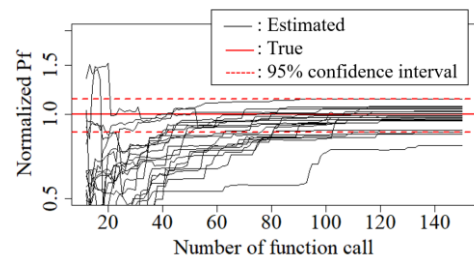


Fig. 4 Limit state probability in the learning process (20 runs).

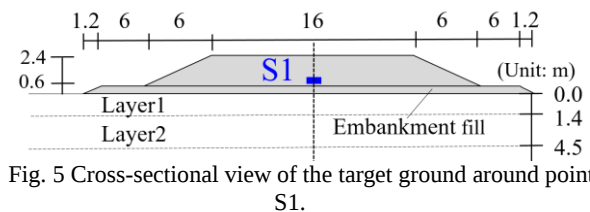


Fig. 5 Cross-sectional view of the target ground around point S1.

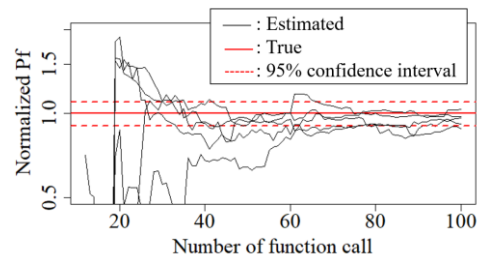


Fig. 6 Limit state probability of settlement by the proposed method (5 runs).