

Region-wise ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の自由振動解析

Free vibration analysis of anisotropic laminated plates by region-wise zig-zag theory

渡辺 力 (函館高専) 落合 楓 (函館高専・専攻科)

Chikara WATANABE, National Institute of Technology, Hakodate College

Kaede OCHIAI, National Institute of Technology, Hakodate College

E-mail: cwatan@hakodate-ct.ac.jp

In this study, a free vibration analysis method for anisotropic laminated plates using the region-wise zig-zag theory has been proposed. This theory is a theory that combine improved zig-zag theory and layer-wise theory in order to apply it to structures reinforced with composite materials. By setting the region in the plate thickness direction, accurate natural frequencies can be calculated effectively not only for out-of-plane vibration modes but also for in-plane vibration modes. The accuracy of this theory for moderately thick plates is investigated, and the method using virtual lamina is applied to the region-wise zig-zag theory to verify the accuracy for thick plates.

1. まえがき

異方性積層板の自由振動の厳密解に関する研究は極めて少なく, Srinivas and Rao の研究においても固有振動数の計算結果や固有振動モードの分類方法について示されていない¹⁾. 著者らは, 固有振動モードを卓越する変位成分の板厚方向の固有関数のモードから分類し, 等方性平板における Srinivas らの分類と等価な面外振動モードと面内振動モードに分類する方法を提案している²⁾. 異方性積層板では, 板厚方向のモード形状が等方性平板に比べ極めて複雑となっている.

このことから, 異方性積層板の自由振動解析に等価単層理論を適用する場合には, 高次理論を用いても正確な固有振動数を計算することは困難となる. さらに, ZIG-ZAG 理論では, 面外振動モード (逆対称モード) の精度を大きく改善できるが, 面内振動モードの固有振動数の精度は等価単層理論と同じとなる.

本研究では, Region-wise ZIG-ZAG 理論³⁾を用いた異方性積層板の自由振動解析法を提案する. この理論は, 複合材料で補強された鋼やコンクリート構造に ZIG-ZAG 理論を適用するために, 改良 ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論を融合させたものである. この理論により, 面外振動モードのみならず, 面内振動モードに対しても効果的に正確な固有振動数を計算することができる.

本研究では, 対称 4 層積層板と対称 6 層積層板を計算モデルとして, Region-wise ZIG-ZAG 理論の精度を検証する. まず, 文献 2) の方法により中等厚板と厚板に対してモード分類を行い, モード毎に固有振動数の厳密解を求める. この厳密解を基に, 中等厚板に対する精度と領域の採り方の影響を調べる. さらに, 仮想ラミナを用いる Region-wise ZIG-ZAG 理論⁴⁾を厚板に適用して, 厚板での精度と仮想ラミナの効果を検証する.

2. Region-wise ZIG-ZAG 理論による自由振動解析

2.1 変位場

Region-wise ZIG-ZAG 理論では, 積層構造を板厚方向に N_R 個の領域に分け, 領域 r 第 k 層の変位を次式で与える.

$$\begin{aligned} u^{r(k)} &= f_0^r u_r + f_1^r u_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_u^r} \phi_{us}^{r(k)} u_s^r \\ v^{r(k)} &= f_0^r v_r + f_1^r v_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_v^r} \phi_{vs}^{r(k)} v_s^r \\ w^{r(k)} &= f_0^r w_r + f_1^r w_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_w^r} \phi_{ws}^{r(k)} w_s^r \end{aligned} \quad (1)$$

ここに, 式 (1) の右辺第 1 項と第 2 項が領域境界変位の項で, 第 3 項が領域内部変位の項である. 領域内部変位の項において, $s=1$ の場合が ZIG-ZAG 項で, $\phi_{u1}^{r(k)}, \phi_{v1}^{r(k)}, \phi_{w1}^{r(k)}$ が領域 ZIG-ZAG 関数, u_1^r, v_1^r, w_1^r が領域 ZIG-ZAG 変位である.

2.2 領域 r の固有方程式

Hamilton の原理から運動方程式を求め, 式 (1) の変位成分を周辺単純支持の境界条件を満足する二重フーリエ級数で仮定し, 任意の (m, n) 項に対する領域 r の固有方程式が得られる.

$$\left[\sum_{k=1}^{N_r} \mathbf{S}_{mn}^{r(k)} \right] \mathbf{F}_{mn}^r = p^2 [\mathbf{M}_{mn}^r] \mathbf{F}_{mn}^r \quad (\text{for } m, n) \quad (2)$$

ここに, $\mathbf{S}_{mn}^{r(k)}$ は領域 r 第 k 層の剛性行列で, $\mathbf{M}_{mn}^r$ は領域 r の質量行列, $\mathbf{F}_{mn}^r$ は未知フーリエ係数ベクトル, p は固有円振動数である. 式 (2) を全領域に組み立てて, 構造全体の固有方程式を求める.

また, 固有円振動数 p の計算結果は無次元振動数 $\lambda = ph\sqrt{\rho/E_2}$ を用いて表す.

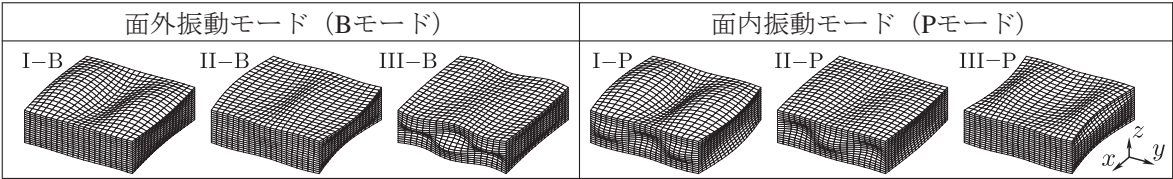


図-1 対称4層積層板 [0/90°/90°/0] の固有振動モード ($h/b=3/10$, (1,3) 波形)

表-1 対称4層積層板 [0/90°/90°/0] の固有振動数の誤差 (領域数 $N_R=4$, $h/b=3/10$) (%)

Mode	$\overline{N}_r$	次数 $p = 1$									次数 $p = 2$								
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
I-B	3	0.35	0.58	0.74	1.02	0.89	0.89	1.69	1.46	1.30	0.221	0.375	0.498	0.969	0.772	0.715	1.663	1.405	1.206
	10	0.13	0.17	0.33	0.85	0.60	0.55	1.55	1.25	1.03	0.104	0.113	0.159	0.565	0.398	0.323	0.958	0.781	0.633
	20	0.11	0.14	0.30	0.83	0.58	0.52	1.54	1.23	1.01	0.043	0.050	0.089	0.239	0.170	0.152	0.409	0.334	0.280
	50	0.10	0.13	0.29	0.83	0.57	0.51	1.53	1.23	1.00	0.009	0.025	0.063	0.055	0.046	0.066	0.114	0.096	0.097
III-B	3	1.38	1.28	1.17	4.48	4.29	4.01	5.63	5.45	5.18	0.212	0.199	0.193	0.547	0.519	0.479	1.012	0.966	0.903
	10	0.35	0.33	0.30	2.12	2.05	1.94	3.44	3.36	3.25	0.068	0.065	0.066	0.334	0.317	0.292	0.551	0.526	0.489
	20	0.27	0.26	0.24	1.96	1.89	1.79	3.28	3.21	3.11	0.042	0.040	0.040	0.261	0.247	0.227	0.368	0.348	0.319
	50	0.25	0.24	0.22	1.91	1.84	1.75	3.24	3.17	3.07	0.033	0.032	0.031	0.223	0.211	0.194	0.273	0.257	0.231
I-P	3	0.82	0.95	0.68	0.95	0.93	0.85	1.06	0.82	0.87	0.077	0.288	0.170	0.164	0.284	0.301	0.356	0.301	0.390
	10	0.29	0.33	0.34	0.46	0.31	0.24	0.68	0.28	0.36	0.035	0.113	0.065	0.086	0.117	0.104	0.198	0.134	0.158
	20	0.25	0.28	0.32	0.42	0.27	0.20	0.66	0.24	0.32	0.016	0.051	0.033	0.038	0.054	0.053	0.087	0.059	0.078
	50	0.24	0.27	0.31	0.41	0.26	0.18	0.65	0.23	0.31	0.005	0.021	0.017	0.011	0.021	0.033	0.024	0.021	0.041
III-P	3	1.7	14.9	0.9	1.4	27.2	18.3	1.3	12.5	18.2	1.49	11.69	0.35	1.38	11.03	13.40	1.28	11.09	11.41
	10	1.6	13.8	0.2	1.3	12.9	18.1	1.2	12.5	18.0	0.90	7.89	0.13	0.90	7.06	8.67	0.83	7.13	8.40
	20	1.6	13.8	0.2	1.3	12.9	18.1	1.2	12.5	18.0	0.41	3.49	0.06	0.42	3.15	4.25	0.39	3.32	4.12
	50	1.6	13.8	0.2	1.3	12.9	18.1	1.2	12.5	18.0	0.09	1.03	0.04	0.09	0.87	1.55	0.09	0.97	1.49

3. 仮想ラミナの効果と固有振動数の精度

Region-wise ZIG-ZAG 理論では、領域内の層数 $N_r=1$ の場合に、領域内に $\overline{N}_r$ 個の仮想的な数学層（仮想ラミナ）を設けて精度を改善させることができる⁴⁾。

本研究では、異方性積層板の固有振動モードを図-1 に示すように面外振動モード（I-B, II-B, III-B）と面内振動モード（I-P, II-P, III-P）に分類する。表-1 は、板厚比 $h/b=3/10$ の対称4層積層板に対する Region-wise ZIG-ZAG 理論による固有振動数の厳密解に対する誤差（%）を示したものである。領域数は $N_R=4$ として、各層を一つの領域として設定している（ $N_r=1$ ）。次数は $p=1$ および $p=2$ とし、仮想ラミナ数 $\overline{N}_r$ は各領域で $\overline{N}_r=3\sim 50$ まで採っている。

まず、次数 $p=1$ においても、領域数 $N_R=4$ としているので誤差は小さくなっているが、仮想ラミナ数を増加させると、どのモードにおいても全ての波形で僅かに精度が改善されている。特に III-P モードでは、 $\overline{N}_r=3$ のときに 1~27% 程度の大きな誤差が生じているが、 $\overline{N}_r$ を増加させても (2,2) 波形を除き改善効果は僅かである。

一方、次数 $p=2$ では、誤差がさらに小さくなっているが、仮想ラミナ数を増加させるとどのモードにおいても全ての波形で精度が改善されている。特に、高次の面内振動モード III-P では、 $\overline{N}_r=3$ のときに 1~13% 程度の大きな誤差が生じているが、仮想ラミナ数を増加させ

ると誤差が大きく減少し、 $\overline{N}_r=50$ では 0.1~1.5% 程度にまで改善されている。その他のモードでも、仮想ラミナ数に $\overline{N}_r=10$ を用いれば、全ての波形で誤差は 1% 以下となっている。なお、式 (1) から分かるように、仮想ラミナ数を増加させても未知自由度数は増加しない。

4. あとがき

異方性積層板の自由振動解析においても仮想ラミナを用いる方法が有効で、仮想ラミナ数を増加させることで固有振動数の精度が改善される。特に、仮想ラミナの効果は、高次の振動モードで効果が大きい。仮想ラミナを用いる Region-wise ZIG-ZAG 理論により、厚板に対しても効果的に高精度の固有振動数を計算できる。

参考文献

- 1) Srinivas, S. and Rao, A.K. : Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *Int.J. Solids Struct.*, Vol.6, pp.1463-1481, 1970.
- 2) 渡辺 力, 金浜瞳也, 佐々木恵一: 異方性積層板の自由振動解析における厳密解の導出と改良 ZIG-ZAG 理論の精度検証, 構造工学論文集, Vol.66A, pp.187-200, 2020.
- 3) 渡辺 力: 複合材料ならびに等方性材料からなる積層構造のための Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.76, No.1, pp.58-74, 2020.
- 4) 渡辺 力, 佐野凌希: Region-wise ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の厚板解析への仮想ラミナの適用, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.77, No.2 (応用力学論文集 Vol.24), I_251-I_262, 2021.