

時間発展の形式で捉えた点散乱源による波の多重散乱解析

Time evolution analysis of multiple scattering of waves due to point-like scatterers

丸山海航 (東京理科大学・土木工)・東平光生 (東京理科大学・土木工)

Kaito Maruyama, Tokyo University of Science
Terumi Touhei, Tokyo University of Science
E-mail: 7621527@ed.tus.ac.jp

Multiple scattering of waves due to point-like scatterers in the time domain is formulated. Point-like scatterers in this study describe the effects mass density fluctuation from the back ground structure of the wave field. In addition, Foldy model is employed to avoid the divergence of the interaction of the scatterers. For the time evolution analysis, the Volterra type of the integral equation is derived, which is solved by the Krylov subspace method and FFT. Numerical computations are carried out to examine the effects of the high frequency component of the incident wave field.

1. 本研究の背景と目的

波動散乱解析において散乱源の空間スケールが扱う波動の波長に比べて非常に小さい場合は散乱源を点散乱源とみなすことができる。点散乱源による多重散乱問題は花崗岩における鉱物の多重散乱, 空中の雨滴による音の多重散乱等問題等広い応用範囲を持っている。点散乱源の相互作用に関する研究は歴史が古く, Foldy¹⁾ や Waterman and Truell²⁾ 等の代表的な研究がある。彼らは点散乱源の位置, 散乱強度を確率密度関数で表現し多重散乱の定式化を行うことで媒質の散乱パラメータが複素数にシフトすることを示している。一方で彼らの確率論的アプローチとは別に Hu and Sini³⁾ は量子論におけるくりこみ理論を用いて多重散乱の定式化を行い, その際に現れる散乱パラメータが複素数にシフトすることを示している。これらの研究は周波数領域すなわち単一振動数で固定された調和振動を用いた議論であった。一方で, 時間領域での研究は筆者らが調べた限りにおいては未だ見当たらない。しかしながら時間域での解析は散乱源の時間発展に伴う散乱パラメータの変化する場合の解析に対応でき, さらに時間域の定式化と確率論の組み合わせで散乱波の過渡的応答変化と散乱波の相互作用について新たな知見が得られることが期待できる。本研究は時間領域における多重散乱の定式化をすると共に, 仮想的に設定したモデルに対して数値解析を行っていくことを目的とする。

2. 解析理論

本研究では簡単のために3次元でS波のポテンシャルを用いて考えるため, 支配方程式は式(1)で与えられる。

$$\{\mu \nabla^2 + \rho(\vec{x}) \partial_t^2\} u(\vec{x}, t) = -f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

ここで $\vec{x}$ を任意の位置ベクトル, μ はせん断弾性係数, ρ は密度であり, f は外力である。また本問題では散乱を密度の変動のみで考える。 $\vec{y}_\alpha (\alpha = 1, \dots, N)$ を点散乱源の位置ベクトルとした場合, 密度は式(2)のように表すことができる。

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0 + \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \delta(\vec{x} - \vec{y}_\alpha) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して整理すると

$$(\mu \nabla^2 + \rho_0 \partial_t^2) u(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \delta(\vec{x} - \vec{y}_\alpha) \ddot{u}(\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t) \quad (3)$$

この微分方程式の解 u は Green 関数の性質を利用して式(4)のように Volterra 型の積分方程式として表すことができ, 式(5)のように整理することができる。

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \int_0^t \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|}{c}\right)}{4\pi\mu|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|} \ddot{u}(\vec{y}_\alpha, \tau) d\tau + u^I(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\rho_\alpha}{4\pi\mu|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|} \ddot{u}\left(\vec{y}_\alpha, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|}{c}\right) + u^I(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

$u^I(\vec{x}, t)$ は入射波であり, $u(\vec{x}, t)$ は全波動場である。また式(5)に対して Fourier 変換を用いて整理する。

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\rho_\alpha \mathcal{F}^{-1} \exp\left(-i\omega \frac{|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|}{c}\right) (-\omega^2) \mathcal{F} u(\vec{y}_\alpha, t)}{4\pi\mu|\vec{x} - \vec{y}_\alpha|} + u^I(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (6)$$

両辺に $\vec{x} = \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N$ を代入して連立方程式を構築する。

$$\begin{aligned} u(\vec{y}_\beta, t) &= \sum_{\alpha=1(\neq\beta)}^N \frac{\rho_\alpha \mathcal{F}^{-1} \exp\left(-i\omega \frac{|\vec{y}_\beta - \vec{y}_\alpha|}{c}\right) (-\omega^2) \mathcal{F} u(\vec{y}_\alpha, t)}{4\pi\mu|\vec{y}_\beta - \vec{y}_\alpha|} + u^I(\vec{y}_\beta, t) \end{aligned} \quad (7)$$

なお式(7)において $\alpha = \beta$ のとき $|\vec{y}_\alpha - \vec{y}_\beta| = 0$ になり発散の困難が生じる本研究では Foldy モデルを適用し発散項を0と置き換えることでこの問題を解消する。また行列形式で書き換えると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\vec{y}_1, t) \\ \vdots \\ u(\vec{y}_N, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^I(\vec{y}_1, t) \\ \vdots \\ u^I(\vec{y}_N, t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで Γ は次のように表される.

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ -\frac{\rho_\alpha \mathcal{F}^{-1} \exp\left(-i\omega \frac{|\vec{y}_\beta - \vec{y}_\alpha|}{c}\right) (-\omega^2) \mathcal{F}}{4\pi\mu |\vec{y}_\beta - \vec{y}_\alpha|} & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (9)$$

式 (8) の左辺は Fourier 変換を含む複雑な線形演算子である. そこで Krylov 部分空間反復解法を用いて解くことを試みる. ただし演算子の Fourier 変換に関しては FFT(Fast Fourier Transform) で表現する.

3. 解析結果

式 (3) で現れる外力は式 (10) を用いる.

$$f(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \exp(-at^2) \quad (10)$$

ここで $\vec{x}_0$ は加振点, a はパルスのスペクトル構造を決定づける係数である. パラメータ a を含めた解析条件を Table 1 に示す.

Table 1: Analysis condition

$\rho_0 [\text{g/m}^3]$	2.0
$\rho_\alpha [\text{g/cm}^3]$	0.4
$\mu [\text{GPa}]$	4.0
a	10
Number of scatterers	27
Fourier Points	2^{13}

点散乱源の位置, 加振点, 観測点の位置を Fig.1 に示す. Fig. 1a において紫の点が点散乱源, 緑の点が加振点, 青の点が観測点となっている (点 A). Fig. 1b は Fig. 1a において点散乱源の部分を拡大した図となっている.

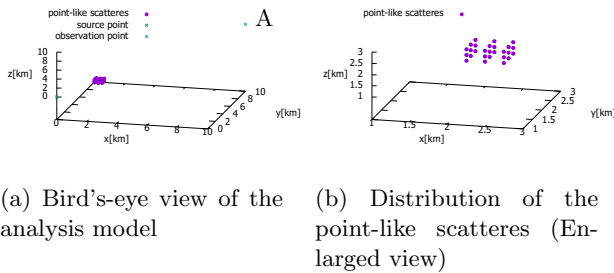


Fig. 1: Distribution of the scatterers and analysis model

Krylov 部分空間反復解法として GMRES 法を用いる. 散乱解析において高振動数成分の影響を調べるために, 0.5[Hz], 0.8[Hz] を閾値としてスペクトルを cut off して反復計算を試みる. これらの cut off に対する反復回数と相対残差の関係を Fig. 2 に示す. Fig. 2 に示すようにわずかな振動数の増加が解の収束特性に悪影響を及ぼすことが分かる.

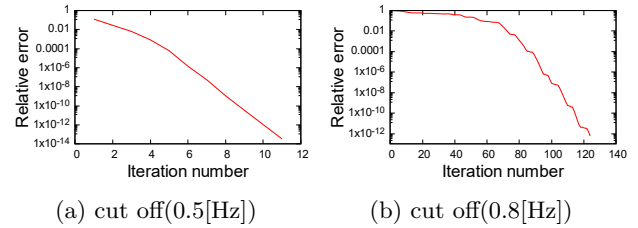


Fig. 2: Convergence of the solutions

次にこれらの cut off 振動数での Fig. 2 点 A における散乱波の時刻歴応答を Fig.3 に示す. 0.8[Hz] で cut off した場合において, 波が到達する以前に応答が始まっており因果性の評価に問題が生じている.

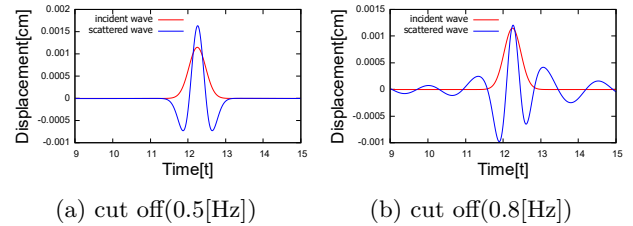


Fig. 3: Time histories of the response at point A

4. 結論

本研究では点散乱源による多重散乱解析を時間発展の形式で捉え定式化を行い, FFT と Krylov 部分空間反復解法を組み合わせシミュレーションを行った.

時刻歴応答解析において cut off 振動数の閾値は大きな影響を与え, とくに因果性の評価や解の収束特性に問題をもたらすことがわかった. 本解析にとどまらず, 周波数域での解を単純に FFT を用いて時刻歴応答を求める際にも同様な問題が現れるようである⁴⁾. 密集した点散乱源の影響を分離する解析結果を得るためには, 高い振動数を用いる必要があるため, これらの問題を乗り越える解析手法の展開が必要である.

参考文献

- 1) Foldy, L. (1945). The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers, *Phys. Rev.*, **67**, 107-119.
- 2) P.C. Waterman and Rohn Truell, (1961). Multiple Scattering of Waves, *J. Math. Phys.*, **2**, 512
- 3) Hu, G. and Sini, M., (2013). Elastic scattering by finitely many point-like obstacles, *J. Math. Phys.*, **54**, 042901.
- 4) 松波克真 (2022). 令和 3 年度卒業論文 点散乱源の相互作用解析における高周波数成分の影響, 東京理科大学理工学部土木工学科応用力学研究室