

スパース性を利用した空洞のイメージング Inverse scattering analysis for imaging of cavities using sparsity

渡邊 彩 (東工大・環境・社会) 廣瀬 壮一 (東工大・環境・社会)

Aya WATANABE, Tokyo Institute of Technology
Sohichi HIROSE, Tokyo Institute of Technology

In this study, we proposed an inverse analysis method based on sparse modeling for imaging defects inside materials and applied it to the problem of estimating the shape of cavities from 2D anti-plane scattered waves. Although it does not always achieve good estimation accuracy, the possibility of cavity shape estimation by the inverse analysis method based on sparse modeling was demonstrated.

1. はじめに

インフラ構造物の維持管理において、材料内部の欠陥検出に非破壊検査が使われる。特に、近年、フェーズドアレイに代表される多チャンネル計測の利用が増加している¹⁾。多チャンネル計測を用いれば、探傷結果を画像で評価することが可能になるため、欠陥の位置や大きさ、形状を推定しやすく、また損傷状況の全体像がイメージしやすいという利点がある。

多点での超音波計測による材料内部のきずの画像化手法は、Bスコープ、Cスコープ²⁾をはじめとして、TRMやTFMなど多数あるが、高い画像精度を得るには多くの計測データを必要とする。しかし、データが大量になると検査の効率が低下する。そこで我々の研究グループでは、少ないデータから高精度な画像を得ることを目的として、スパースモデリングの概念を導入した画像化手法を開発してきた。

スパースモデリングは、データが持つスパース性に着目して、本質的な情報のみでデータを表現する技術である³⁾。スパースとは、まばら・わずかという意味であり、本質的に重要な情報は少数で、大部分は0であるという性質のことを指す。この性質により、スパースモデリングは未知数の数に対して方程式の数が少ない場合にも有効となる。これまでスパース性を利用した逆解析による波源の探索に関する研究では、主に物体力やき裂の推定が行われてきた。本研究では、空洞による定常面外波動の散乱問題を考え、数値シミュレーションで得られた散乱変位から空洞境界のイメージングを行う。

2. 波動理論の定式化

2次元無限領域の部分領域において、空洞が存在し、それにより面外波動が散乱されている場合を考える。このとき、観測点 $\mathbf{y}$ における散乱変位 $u_3(\mathbf{y})$ は以下のように表せる。

$$u_3(\mathbf{y}) = - \int_S \mu \mathbf{n}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_3(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \quad (1)$$

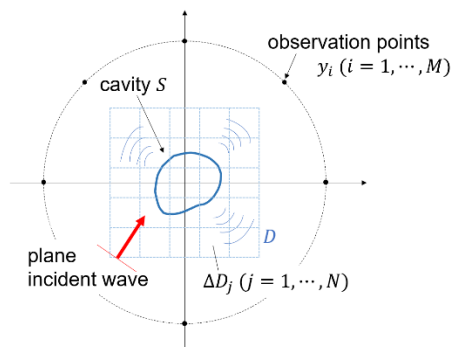


Fig. 1 Cavity and observation points

ここに、 μ はせん断弾性係数、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は空洞境界 S 上の法線ベクトル、 $U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は面外波動の変位基本解、 $u_3(\mathbf{x})$ は境界 S 上の面外変位である。これらの内、 $\mu U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mu U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = iH_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ ($H_0^{(1)}$:第1種0次ハンケル関数、 k :波数)で既知の関数である。解くべき問題は、式(1)の左辺の観測点 $\mathbf{y}$ での散乱変位 $u_3(\mathbf{y})$ から空洞境界 S あるいは S 上での変位 $u_3(\mathbf{x})$ を推定しようとする逆解析であるが、 $\mu U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 以外の境界 S 、法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 及び変位 $u_3(\mathbf{x})$ は全て未知数である。そこで、等価物体力の考えを導入して、式(1)の積分を以下のように表面積分から領域 D に関する体積分に書き換える。

$$\begin{aligned} u_3(\mathbf{y}) &= - \int_D \nabla_{\mathbf{x}} U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad \cdot \left\{ \int_S \mu \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) u_3(\boldsymbol{\xi}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \right\} dV_{\mathbf{x}} \\ &= - \int_D \nabla_{\mathbf{x}} U_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、実際に空洞がどこに分布するかは分からないので、領域 D は空洞面 S を含む十分大きい領域とする。また、 $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ は上式の空洞面 S に関する面積分で、モーメントテンソルに相当する量である。

Fig.1に示すように、領域 D を N 個の小領域 ΔD_j ($j = 1, \dots, N$)に分割し、 M 個の観測点 $\mathbf{y}_i$ ($i = 1, \dots, M$)において変位 $u(\mathbf{y}_i)$ を観測したとすると、式(2)は以下のように書ける。

$$u(\mathbf{y}_i) = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta D_j} \nabla_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) dV_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_j \quad (i = 1, \dots, M) \quad (3)$$

これより、 $U_{ij} = \int_{\Delta D_j} \nabla_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) dV_{\mathbf{x}}$ を成分 (i, j) を持つ行列 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{B}_j$ を解ベクトル $\mathbf{x}$ 、 $u(\mathbf{y}_i)$ を観測ベクトル $\mathbf{u}$ とすると、以下の形式の方程式が得られる。

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{x}\} \quad (4)$$

上式より、波源を推定するためには、複数の観測点における変位 $\{\mathbf{u}\}$ が与えられたときに波源でのモーメントテンソル $\{\mathbf{x}\}$ を求める逆問題を解くこととなる。本研究では $\{\mathbf{x}\}$ の多くの成分がゼロとなる解であること、つまりスパース性を持つことに注目して、スパースモデリングを用いて解く。

3. スパースモデリングによる逆解析

波源の推定を行うために解くべき方程式は $\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{x}$ であり、解ベクトル $\mathbf{x}$ はスパース性を有する。これより、スパースモデリングの代表的手法であるLASSOによる定式化を行い、解くべき方程式は以下の最小化問題に書き換えられる。

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{U}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{z} = 0 \quad (5)$$

ただし、 $\|\cdot\|_q$ は L^q ノルム、 λ は正則化パラメータ、 $\mathbf{D}$ はペナ

ルティ行列である.

この最小化問題は, ADMMによる以下の繰り返し計算によって最適解を求める.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \rho \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \{ \mathbf{U}^T \mathbf{u} + \rho \mathbf{D}^T (\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)} / \rho) \} \quad (6)$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = S_{\lambda/\rho}(\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{v}^{(k)} / \rho) \quad (7)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + \rho(\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k+1)}) \quad (8)$$

ここに, $\mathbf{v}$ はラグランジュの未定乗数, ρ はペナルティパラメータであり, 上付き文字は反復回数を表している. また, $S_{\lambda/\rho}(\cdot)$ は次式で定義されるソフトしきい値作用素である.

$$S_{\eta}(t_i) = \begin{cases} t_i - \eta, & t_i \geq \eta \\ 0, & -\eta < t_i < \eta \\ t_i + \eta, & t_i \leq -\eta \end{cases} \quad (9)$$

以下の解析では, ρ の値を初期値 $\rho = 0.01$ として, Residual Balancing Methodで決定し, λ はCross Validation (CV)⁴⁾によって $1.0 \times 10^{-6} \sim 6.0 \times 10^{-6}$ の範囲でCV値が最小となるように求める.

また, ADMMは双対残差 $\mathbf{d}^{(k+1)} \equiv -\rho \mathbf{D}^T (\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)})$ と主残差 $\mathbf{r}^{(k+1)} \equiv \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k+1)}$ が, 繰り返し計算において以下の条件を満たしたときに解が収束したとしてADMMの反復を終了させる⁵⁾.

$$\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|_2 \leq \sqrt{M} \epsilon^{\text{abs}} + \epsilon^{\text{rel}} \max \{ \|\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2, \|\mathbf{z}^{(k+1)}\|_2 \} \quad (10)$$

$$\|\mathbf{d}^{(k+1)}\|_2 \leq \sqrt{N} \epsilon^{\text{abs}} + \epsilon^{\text{rel}} \|\mathbf{D}^T \mathbf{v}^{(k+1)}\|_2 \quad (11)$$

ここに, $\epsilon^{\text{abs}} \geq 0$ は絶対許容値, $\epsilon^{\text{rel}} \geq 0$ は相対許容値と呼ばれる. 以下の解析では $\epsilon^{\text{abs}} = 1.0 \times 10^{-9}$, $\epsilon^{\text{rel}} = 1.0 \times 10^{-8}$ とした.

4. 解析例

Fig. 2に示すように, 領域 D に空洞が存在する場合の逆解析を考える. 領域 D は $x-y$ 座標において, $-1 \leq x/a \leq 1$, $-1 \leq y/a \leq 1$ の正方領域とし, 5×5 の25個の小領域に分割する. ただし, a は基準長さを表す. また, 領域内に存在する空洞は, 原点を中心とした一辺 $0.8a$ の正方形の空洞とし, 空洞によって散乱された面外波動の変位を原点を中心とする半径 $2a$ の円周上に等間隔に取った32か所の観測点で計測したとする.

以上の条件の下で, 波数 ak を変化させて逆解析を行った. 結果の理想は, 空洞の境界が存在する小領域に等価物体力 $\mathbf{B}_j$ の値が出ることである. Figs. 3, 4に $ak = 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$ のときの $\mathbf{B}_j$ の分布を示す. また, 各波数における解析時のCV値をFig. 5に示す. Figs. 3, 4のように $ak = 3.0 \sim 5.0$ 程度では比較的正しい位置に値が出力されたが, $ak = 1.0 \sim 2.5$ のときは, CV値が小さいにも関わらず正しい位置に $\mathbf{B}_j$ の値が出力されず, 空洞の存在位置を推定することができなかった. また, 波数 ak を5.5より大きくしていくと, 空洞の位置推定の精度が下がるだけでなく, CV値が著しく増加した.

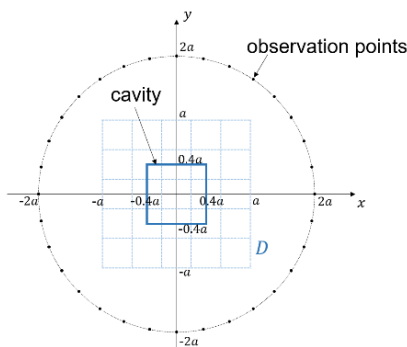


Fig. 2 Square cavity and observation points

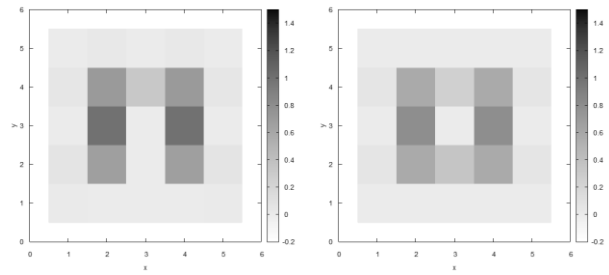


Fig. 3 Distribution of $\mathbf{B}_j$ for $ak = 3.5$ (left), $ak = 4.0$ (right)

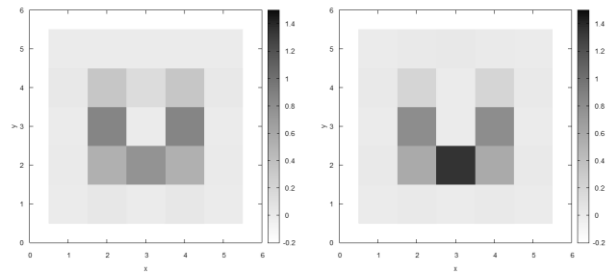


Fig. 4 Distribution of $\mathbf{B}_j$ for $ak = 4.5$ (left), $ak = 5.0$ (right)

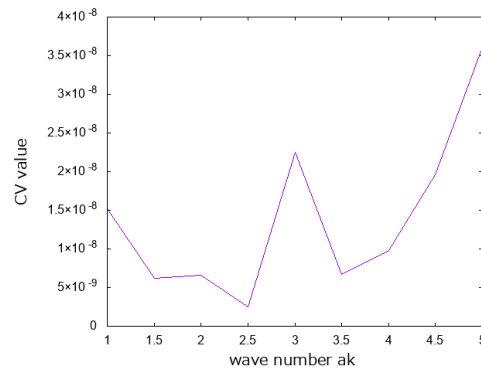


Fig. 5 CV values versus wave number ak

5. おわりに

本研究では, 2次元面外波動の散乱理論を考え, 空洞が存在する場合のある観測点における変位の式を導出し, その変位を用いて逆解析を行うことで空洞の位置推定を行った. 波数などの条件を変化させて逆解析を行い, 波長と空洞の大きさや形状との関係やCV値などによって精度が変わることが分かった.

参考文献

- 1) Brue W. Drinkwater, Paul D. Wilcox : Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation; A review, NDT&E International 39 (2006) 525-541.
- 2) 三原毅 編 : 超音波探傷試験Ⅲ, 日本非破壊検査協会, 2017.
- 3) 大関真之 : 今日からできるスパースモデリング, 2015 年度大阪市立大学・電子・物理工学特別講義, 2015.
- 4) T. Hastie, R. Tibshirani, and M. Wainwright : Statistical Learning with Sparsity The lasso and Generalizations, CRC press, 2015.
- 5) S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein : Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternation Direction Method of Multipliers, Foundation and Trends in Machine Learning, Vol.3, No.1, pp.1-122, 2011.