

演算子積分時間領域境界要素法を援用した 粘弾性体中のき裂に対する3次元線形化逆散乱解析

3-D linearized inverse scattering analysis for crack in viscoelastic media
using convolution quadrature time-domain boundary element method

斎藤隆泰・竹田晴彦 (群馬大・理工学府)

Takahiro SAITOH and Haruhiko TAKEDA, Gunma University
E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp

This paper presents a 3-D linearized inverse scattering technique for cracks in viscoelastic media. The linearized inverse scattering technique based on the Kirchhoff approximation is applied to boundary type defects like cracks in viscoelastic media. The scattered wave data used in this inverse scattering technique are calculated by the convolution quadrature time-domain boundary element method (CQBEM). Some numerical examples for cracks in viscoelastic media are shown to validate the proposed methods.

1. はじめに

固体中の欠陥の位置や形状を再構成する手法の一つである線形化逆散乱解析は、様々な弾性波動問題¹⁾へ適用されてきた。また、本論文で対象とする粘弾性波動問題にも、逆散乱解析は適用されており、主に空洞欠陥に対する解析²⁾が行われてきた。しかしながら、粘弾性体中のき裂を対象とした逆散乱解析³⁾は、2次元問題においてのみ行われており、3次元問題を想定した数値解析例は無い。また、複数き裂の再構成や、一般に、き裂の再構成に用いられる線形化法が、粘弾性の影響下において、どの程度有効であるかの検討は行われていない。そこで本研究では、粘弾性体中のき裂に対する3次元線形化逆散乱解析法を開発し、き裂の再構成に適用することを行う。ここで、逆散乱解析に必要となる散乱波データ計算には、演算子積分時間領域境界要素法(CQBEM)を用いて計算を行う。本稿では、紙面の都合上、CQBEMを用いた粘弾性体中のき裂に対する順解析の定式化は省略し、粘弾性体中のき裂に対するKirchhoff近似に基づく線形化逆散乱解析の定式化について示す。その後、数値解析例を示すことで、本手法の有効性を確認し、最後に今後の課題について述べる。

2. 解くべき問題

ここでは、等方・均質な無限粘弾性体 D 中に、き裂 S が存在する場合を考える。本問題では、き裂のおよその位置は既知とする。き裂近傍に原点 o を設け、その原点 o に向け、十分遠方から入射波 u_i^{in} を送信する。入射波によって発生する、き裂からの散乱波 u_i^{sc} を、観測点 $\mathbf{x}^m (m = 1, 2, \dots, M)$ において取得する。得られた散乱波を用いて逆散乱解析を実行することで、粘弾性体中のき裂の位置や形状の再構成を行う。

このとき入射波が、き裂に到達するまで静止過去の条件を満足するものとする。すなわち、位置 $\mathbf{x}$ 、時刻 t における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対して、初期条件 $u_i(\mathbf{x}, t = 0) = 0$ および $\partial u_i(\mathbf{x}, t = 0)/\partial t = 0$ を考慮すれば、粘弾性波動問題における支配方程式は次のように表される。

$$\mu(t) * \ddot{u}_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + \left(K(t) + \frac{1}{3}\mu(t) \right) * \ddot{u}_{j,ij}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } D \quad (1)$$

ただし、 ρ は密度、 $\mu(t)$ 、 $K(t)$ はそれぞれ、せん断弾性係数、体積弾性係数に対する緩和関数を表し、不遡及の公理 $\mu(t) = 0$ 、 $K(t) = 0$ 、 $-\infty < t < 0$ を満足するものとする。また、 $*$ は畳込み積分、 $(\cdot)$ および $(\cdot)_i$ はそれぞれ、時間および空間に関する微分 $\partial/\partial t$ 、 $\partial/\partial x_i$ を表す。

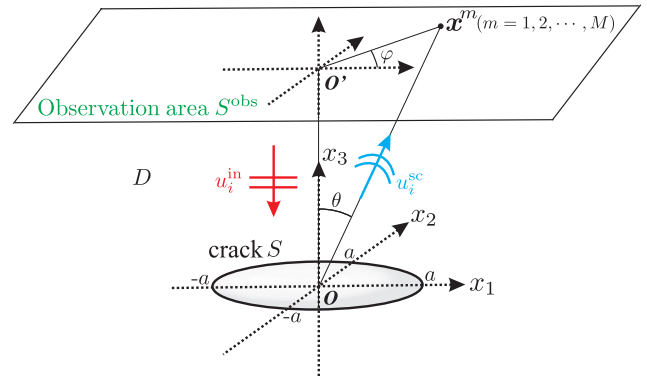


Fig. 1 Inverse scattering analysis model.

3. 粘弾性体中の欠陥に対する逆散乱解析の定式化

さて、本研究で扱う逆散乱解析では、散乱波の積分表現式を起点としてその定式化を行う。ただし、波動に分散性を持つ粘弾性波動問題の場合、時間領域の散乱波の積分表現式は、一般に計算が困難である。よって、以下の粘弾性波動問題に対する線形化逆散乱解析の定式化では、周波数領域における散乱波の積分表現式を起点としてその導出を行う。

以下ではまず、粘弾性波動問題に対する散乱波の積分表現式を記述する。その後、散乱波の積分表現式に対し、遠方場近似、および、Kirchhoff 近似を施すことで、粘弾性体中のき裂に対する欠陥形状再構成式を導出する。

(1) 粘弾性波動問題における散乱波の積分表現式

さて、3次元粘弾性波動問題における周波数領域での散乱波 $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$ に関する積分表現式は、対象とするき裂 S において表面力フリーを仮定すると、次式で表される。

$$\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) = - \int_S \tilde{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) [\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)] dS_y \quad (2)$$

ここで、 ω は角周波数、 $\tilde{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ は3次元粘弾性波動問題における周波数領域の二重層核である。また、 $[\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)]$ は、き裂の開き変位である。さて、実際の波動の観測では、散乱波は十分遠方において観測されることが多い。よって、式(2)の散乱波に対する積分表現式に対し、遠方場近似を適用し、散乱波の縦波成分のみを考慮すると、以下の遠方散乱波

の積分表現式を得る.

$$\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i\tilde{k}_L^* B_{ijk}^L}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{i\tilde{k}_L^*|\mathbf{x}|} \int_S n_k(\mathbf{y}) e^{-i\tilde{k}_L^* \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} [\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)] dS_y \quad (3)$$

ここで, B_{ijk}^L は, $B_{ijk}^L = -\{(1-2\kappa)\delta_{jk} + 2\kappa\hat{x}_j\hat{x}_k\}\hat{x}_i$, $\kappa = \tilde{k}_L^*/\tilde{k}_T^*$, $\hat{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{x}$ の単位ベクトルである. 3次元粘弾性波動問題に対する逆散乱解析の定式化では, 式(3)の遠方散乱波の積分表現式を用いて定式化を行う.

(2) 粘弾性体中のき裂に対する Kirchhoff 逆散乱解析の定式化

粘弾性体中のき裂 S に対し, Kirchhoff 近似を用いた逆散乱解析の定式化を行う. Kirchhoff 近似では, 式(3)における, き裂の開き変位 $[\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)]$ を, スネルの法則の下, 入射波の照射面における入射変位 $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$ と反射変位 $\tilde{u}_j^{\text{ref}}(\mathbf{y}, \omega)$ の和として近似する. ここで, 本研究で用いる入射波は縦波平面波とし, 周波数領域において次のように与える.

$$\tilde{u}_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) = F(\omega) \hat{d}_i^{\text{in}} e^{i\tilde{k}_L^* \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{x}} \quad (4)$$

ここで, $\hat{\mathbf{d}}^{\text{in}}$, $\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ はそれぞれ, 入射波の偏方向および進行方向を表す単位ベクトルであり, $F(\omega)$ は粘弾性体中を進行する入射波の振幅である. さて, Kirchhoff 近似により, き裂の開き変位 $[\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)]$ を入射変位 $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$ と反射変位 $\tilde{u}_j^{\text{ref}}(\mathbf{y}, \omega)$ の和として線形化近似した後, 式(3)に対し, き裂境界 S 上においてのみ値を有する次の特異関数 $\gamma(\mathbf{y})$

$$\int_D \gamma(\mathbf{y}) dV = \int_S dS \quad (5)$$

を導入する. 特異関数 $\gamma(\mathbf{y})$ を含む式(3)を整理し, $\mathbf{K} = \tilde{k}_L^*(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}})$ なる $\mathbf{K}$ 空間に対する変数変換を行うと, 最終的に逆 Fourier 変換を適用することで, 特異関数 $\gamma(\mathbf{y})$ を次のように導出することができる.

$$\gamma(\mathbf{y}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) |\mathbf{x}| \sin \theta (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{2i\pi^2 \tilde{c}_L^* F(\omega) B_{ijk}^L D_j n_k} \times e^{-i\tilde{k}_L^* (|\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{y})} d\omega d\theta d\varphi \quad (6)$$

ただし, $D_j = \hat{d}_j^{\text{in}} + \sum_{\alpha=L,T} R_L^\alpha \hat{d}_j^{\text{ref}}$ として式を整理している. ここで, R_L^α は, 縦波 (L) 入射波に対する反射縦波 ($\alpha = L$) と反射横波 ($\alpha = T$) の反射係数を表す. また, $\tilde{c}_L^*$ は粘弾性波動問題における周波数領域の縦波複素波速である. 式(6)で導出された特異関数 $\gamma(\mathbf{y})$ は, き裂境界 S 上でのみ値を持つ関数であるため, 特異関数の右辺を精度よく計算することで, 粘弾性体中のき裂の位置や形状の再構成が可能となる.

4. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 本解析で対象とするき裂は, 図1に示すような, 原点 $\mathbf{o}$ を中心とする x_1-x_2 面内に存在する半径 a の円形き裂とする. また, 本逆散乱解析に用いる散乱波は, 図1に示すように, き裂に対して垂直に送信された1つの入射波 u_i^{in} に対して, き裂面に平行かつ, 距離 $|\mathbf{o} - \mathbf{o}'| = 12a$ なる観測面 S^{obs} 上の観測点 $\mathbf{x}^m (m = 1, \dots, M)$ によって観測されるものとする. 本解析では, 散乱波の観測面 S^{obs} を, $-5a \leq x_1, x_2 \leq 5a$ の正方領域とし, 観測点 $\mathbf{x}^m$ 同士の間隔を $dx_1 = dx_2 = a$ として設けた. すなわち, 観測点の総数 M は, $M = 11 \times 11 = 121$ 点とした. き裂は 96 個の四角形要素で分割・離散化しており, 時間ステップ数 $N = L = 1024$, 時間増分は $c_{L0} \Delta t/a \simeq 0.022$ として散乱

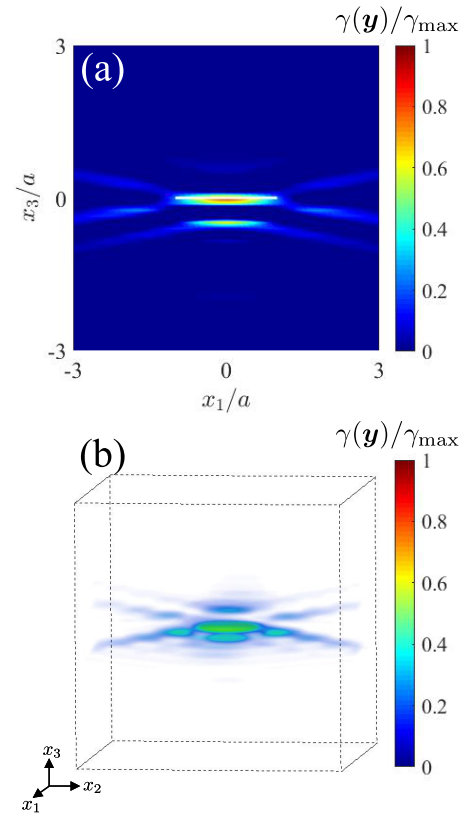


Fig. 2 Shape reconstruction results for a crack in a viscoelastic medium. (a) $x_1 - x_3$ plane, (b) 3-D space.

波の計算を行った. また, 解析に用いた粘弾性パラメータは, 三要素標準モデルより, $\mu_R/\mu_0 = 0.85$, $K/\mu_0 = 5/3$, $\tau\sigma = 0.5T_0$, $\tau\epsilon = 17T_0/40$ とした.

図2(a), (b)に, 3次元無限粘弾性体中のき裂に対する逆散乱解析結果を示す. 図2(a), (b)には, それぞれ $x_1 - x_3$ 平面および, 3次元空間における再構成結果を示している. ここで, き裂の再構成結果は, 式(6)で計算された特異関数 $\gamma(\mathbf{y})$ を, それぞれの空間上にプロットすることで表現している. なお, 図(a)中の白線は, き裂の正解位置を表している. 数値解析結果より, き裂の正解位置に特異関数 $\gamma(\mathbf{y})/\gamma_{\text{max}}$ の値が現れており, き裂の位置および形状を概ね精度よく再構成できていることが確認できる. よって, 本手法の有効性を概ね確認できた.

5. まとめと今後の課題

演算子積分時間領域境界要素法を援用した, 粘弾性体中のき裂に対する3次元逆散乱解析を行った. 解析結果より, 粘弾性体中のき裂を概ね再構成できることを示した. 今後は, 粘弾性の影響に伴う欠陥形状再構成能の検討や, 異方性・粘弾性の影響を考慮した逆散乱解析を行う予定である.

参考文献

- 1) 斎藤隆泰, 稲垣祐生, 下田瑞斗: 異方性弾性体中の欠陥に対する2次元逆散乱解析, 非破壊検査, **66**(2) (2017), pp. 84-89.
- 2) 竹田晴彦, 斎藤隆泰: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた粘弾性体中の空洞に対する3次元順解析および逆散乱解析, 計算数理工学論文集, **20** (2020), pp. 1-6.
- 3) 竹田晴彦, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 粘弾性体中の領域型および境界型欠陥に対する2次元線形化逆散乱解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), **77**(2) (2021), pp. I.47-I.57.