

異方性材料の面外波動問題に対する基本解近似解法の適用 Implementation of the method of fundamental solutions to anti-plane wave problems of anisotropic materials

古川 陽 (北大・大学院工学研究院) 松村 耕佑 (熊谷組)
斎藤 隆泰 (群馬大・大学院理工学部) 廣瀬 壮一 (東工大・環境・社会理工学院)
Akira FURUKAWA, Hokkaido University
Kosuke MATSUMURA, Kumagai Gumi
Takahiro SAITOH, Gunma University
Sohichi HIROSE, Tokyo Institute of Technology
E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp

This study presents the method of fundamental solutions (MFS) for anti-plane wave problems of anisotropic materials. The MFS represents the displacement field of the materials using the linear combination of fundamental solutions, and determines approximation coefficients by boundary conditions. In this manuscript, we will show some results of the MFS for anti-plane wave scattering of anisotropic materials.

1. はじめに

異方性材料は、力学的性質が方向によって異なる材料であり、その波動現象は、等方性材料の場合と比較して複雑であることが知られている。異方性材料の代表例である繊維強化プラスチックは、近年、土木構造物への適用例が報告されている。これに伴い、将来、異方性材料に対する超音波非破壊評価は、維持管理において重要な役割を果たすことが期待されている。

基本解近似解法は、支配方程式の基本解を用いて解析を行うメッシュフリー型の数値シミュレーション手法である¹⁾。基本解近似解法は、近似解を基本解の線形結合によって表現するため、解析における未知量が少なく済むことが知られている。また、基本解の数値計算において、観測点と源点が一致することがないため、境界要素法と比較して、数値計算への実装は比較的容易である。しかしながら、異方性弾性体の波動問題に対しては、利用可能な基本解が存在するにもかかわらず、その適用例はほとんど報告されていない。

以上を踏まえ、本研究では、異方性弾性体の面外波動問題に対して基本解近似解法を適用し、その有効性について検討する。以下では、特に断りのない限り、1つの項の中に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。また、ギリシャ文字による下付き添え字は1, 2をとるものとする。

2. 対象とする問題

本稿では、異方性弾性体の面外波動散乱問題について考える。Fig.1に解析対象とする外部領域 V を示す。同図において、 ∂V は散乱体の境界、 V_C は補領域を表す。

周波数領域における異方性弾性体の運動方程式は、次式で与えられる。

$$(C_{3\beta\delta}\partial_\beta\partial_\delta + \rho\omega^2)\tilde{u}(\mathbf{x}) = -\rho\tilde{b}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ における面外方向変位、 ω は角周波数を表し、 $\partial_\beta = \partial/\partial x_\beta$ である。また、 ρ は異方性弾性体の密度、 C_{ijkl} は異方性弾性体の弾性定数、 $\tilde{b}(\mathbf{x})$ は物体力の面外方向成分を表す。加えて、変位 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は以下の関係式を満たす。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V \cup \partial V \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は入射波の面外方向変位、 $\tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ は散乱波の面外方向変位を表す。ただし、散乱波は放射条件を満たすものとする。

上述の面外波動散乱問題は、式(1)に適切な境界条件を与

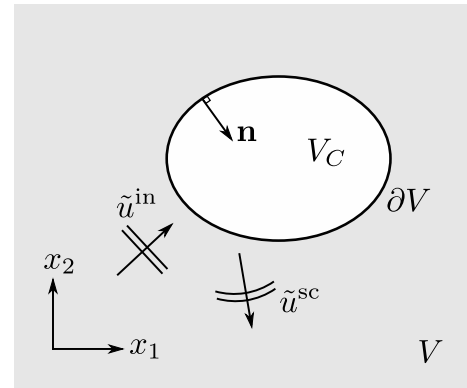


Fig. 1 Anti-plane wave scattering by a scatterer.

えることで解くことができる。変位固定問題では、境界条件を次式で与える。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

一方、表面力フリー問題では、境界条件を次式で与える。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = C_{3\beta\delta}n_\beta(\mathbf{x})\partial_\delta\tilde{u}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (4)$$

ここに、 $\tilde{t}(\mathbf{x})$, $n_\beta(\mathbf{x})$ は、境界における表面力と単位外向き法線ベクトルを表す。

3. 基本解近似解法

前節に示した面外波動散乱問題に対する基本解近似解法について考える。式(1)に示す運動方程式に対する基本解 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は次式で与えられる。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{p}|=1} \frac{\phi(k_{qS2}|\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}|)}{\Gamma_{33}(\mathbf{p})} d\mathbf{l}(\mathbf{p}) \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は観測点、 $\mathbf{y}$ は源点を表し、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ である。また、 $\Gamma_{33}(\cdot)$, k_{qS2} , $\phi(\cdot)$ は以下の式で与えられる。

$$\Gamma_{33}(\mathbf{p}) = C_{3\beta\delta}p_\beta p_\delta; \mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T \quad (6)$$

$$k_{qS2} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\Gamma_{33}(\mathbf{p})}} \quad (7)$$

$$\phi(\xi) = e^{-i\xi} E_1(-i\xi) + e^{i\xi} \{E_1(i\xi) + i\pi\} \quad (8)$$

ただし、 $(\cdot)^T$ はベクトルの転置を表し、 $E_1(\cdot)$ は指数積分を表す。また、 $i = \sqrt{-1}$ である。

基本解近似解法では、領域内部および境界上の変位を、式

(5) に示す基本解を用いて、次式で表現する。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{x} \in V \cup \partial V$ および $\mathbf{y}_k \in V_C$ であり、 $\tilde{c}_k$ は近似係数を表す。本研究では、散乱体の境界 ∂V 上に選点 $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) を配置し、その選点において境界条件を満たすように近似係数 $\tilde{c}_k$ を決定する。このとき、解くべき連立 1 次方程式は、以下のように表現できる。

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \quad (10)$$

ここに、

$$(\tilde{\mathbf{c}})_k := \tilde{c}_k \quad (11)$$

である。また、係数行列 $\tilde{\mathbf{D}}$ および既知ベクトル $\tilde{\mathbf{h}}$ の成分は、変位固定問題の場合、次式で与えられる。

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{ik} := \tilde{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \quad (12)$$

$$(\tilde{\mathbf{h}})_k := -\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) \quad (13)$$

一方、表面力フリー問題の場合には、次式で与えられる。

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{ik} := \tilde{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \quad (14)$$

$$(\tilde{\mathbf{h}})_k := -\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) \quad (15)$$

ただし、 $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ および $\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は、それぞれ以下の式で表現される。

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{3\beta 3\delta} n_\beta(\mathbf{x}) \partial_\delta \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (16)$$

$$\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = C_{3\beta 3\delta} n_\beta(\mathbf{x}) \partial_\delta \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

領域内部および境界上の変位は、式 (10) を解くことで得られる近似係数 $\tilde{c}_k$ と式 (9) を用いて求めることができる。また、境界における表面力は、近似係数 $\tilde{c}_k$ と式 (9) から導出される表面力の表示式から求めることができる。

4. 数値解析例

前節に示した基本解近似解法を用いて、異方性弾性体の面外波動散乱解析を行う。得られた結果は境界要素法による近似解と比較し、本手法の検証を行う。

本稿において、解析対象とする異方性材料は、グラファイトエポキシ²⁾とした。このとき、密度は $\rho = 1$ とし、弾性定数は次式で与えた。

$$\begin{aligned} C_{3232} &= 0.134, \quad C_{3131} = 0.197, \\ C_{3231} &= C_{3132} = -0.054 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、これらの弾性定数は $C_{1212} (= 32.7 \text{ [GPa]})$ によって正規化されている。

本節で対象とする問題において、散乱体は x_1 - x_2 平面の原点を中心とする円とし、その半径は $a = 1$ とした。また、入射波は平面波とし、次式で与えた。

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \exp[ik^{\text{in}}x_1] \quad (19)$$

ここに、入射波の波数 k^{in} は次式で与えた。

$$k^{\text{in}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{C_{3131}}} \quad (20)$$

ただし、角周波数は $\omega = 1$ とした。解析に用いる選点 $\mathbf{x}_i$ および源点 $\mathbf{y}_k$ の数は $M = N = 50$ とした。選点 $\mathbf{x}_i$ は境界 ∂V 上に等間隔に配置し、源点 $\mathbf{y}_k$ は x_1 - x_2 平面の原点を中心とする半径 $0.75a$ の円上に等間隔に配置した。なお、解析結果の比較に用いる境界要素法は、区間一定要素と選点法を用いて離散化を行っており、解析における要素数は 1000 とした。基本解近似解法、境界要素法ともに、連立 1 次方程式の求解には GMRES 法を用いた。

解析結果として、基本解近似解法および境界要素法によ

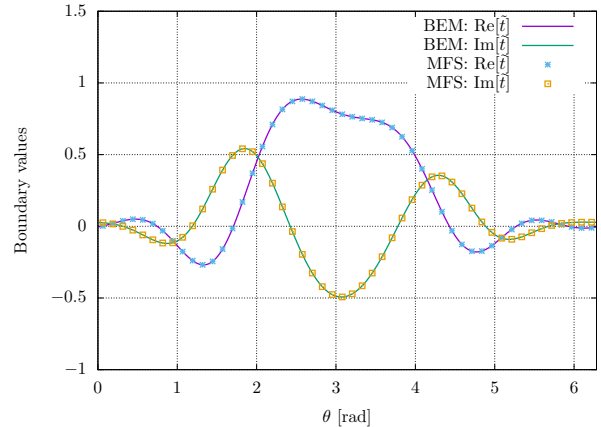


Fig. 2 Comparison of boundary values computed by MFS and BEM (Fixed-displacement boundary condition).

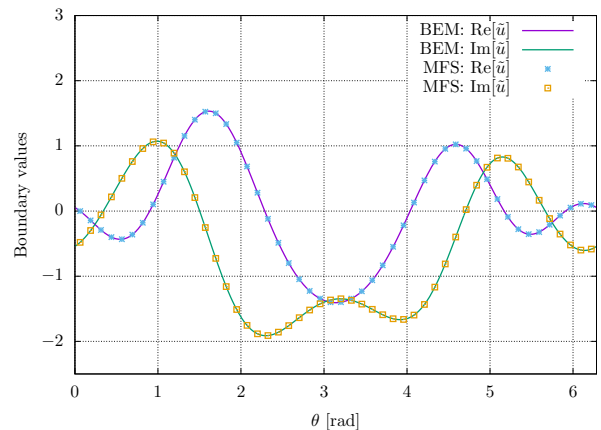


Fig. 3 Comparison of boundary values computed by MFS and BEM (Traction-free boundary condition).

て得られた近似解の比較を行う。Fig.2 および Fig.3 に、変位固定問題および表面力フリー問題に対する境界値の計算結果を示す。同図において、 θ は x_1 軸から反時計回りに測った角度を示す。これらの結果から、基本解近似解法および境界要素法による近似解は概ね一致していることが確認できる。

5. おわりに

本稿では、基本解近似解法による異方性弾性体の面外波動問題の解析手法を説明し、いくつかの数値解析例を示した。はじめに、対象とする問題について整理し、続けて、基本解近似解法の定式化について説明した。その後、数値解析例を示し、基本解近似解法と境界要素法による近似解の比較を行った。これらの結果から、基本解近似解法は、異方性弾性体の面外波動問題に対して適用可能であることを確認した。

参考文献

- 1) Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radational problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 27, pp.759-769, 2003.
- 2) Gaul, L., Kogl, M. and Wagner, M.: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer, 2002.