

NURBS 基底関数を用いた曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素の構築

Development of a Curved Bernoulli-Euler Beam Element using NURBS Basis Function

唐澤 奈央子 (日本大・理) 長谷部 寛 (日本大・理)
Naoko KARASAWA, Nihon University
Hiroshi HASEBE, Nihon University
E-mail:csna21007@g.nihon-u.ac.jp

Isogeometric Analysis is effective for the structural analysis of curved members in civil engineering structures. We developed a curved Bernoulli-Euler beam element using NURBS basis function for Isogeometric Analysis. In this study, a trial function was constructed only the displacement without the angle of deflection. As a result, we confirmed that developed one obtained high convergence rates of relative error.

1. はじめに

土木構造物の構造設計において、細長い部材の構造解析には、はり要素などの構造要素が用いられる。その中でも、はりの断面に対してはりの長さが比較的大きい場合にはベルヌーイ・オイラーはり要素が用いられることが多い。従来の有限要素解析の場合曲線部材を扱う際には直線の要素で細かく分割して解析を行うことが多く、形状誤差の発生は逃れられない。この問題の解決策として、Hughes らにより提案されたアイソジオメトリック解析¹⁾ (以下 IGA) を土木構造物の構造解析に適用することが有効であると考えられる。IGA は近似関数の基底関数に、CAD の形状表現に用いられる NURBS に代表されるスプライン関数を採用することで、厳密な形状表現を可能にする。

これに対し、従来の有限要素解析における曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素では、要素間のたわみ角の連続性を保持するために形状関数に 3 次エルミート多項式を用い、さらに未知変数にたわみ角を含める必要があった²⁾。著者らはこれまで NURBS が要素間で C^{p-1} 連続性を保持する関数であることに着目し、1 変数の NURBS 基底関数で離散化した IGA の考えに基づく直線はり要素を開発した³⁾。本研究はそれを 2 次元平面上の曲線はり部材に適用できるよう進展させた、NURBS 基底関数を用いた曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素を構築したものである。そして、水圧荷重の作用する円弧ばりを対象に、構築した曲線はり要素の性能を評価した。

2. NURBS 曲線と基底関数

式(1)に示す NURBS 曲線は式(2)に示す NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ とコントロールポイントの位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ の線形結合で表される。

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (1), \quad R_i^p(\xi) = \frac{N_i^p(\xi) w_i}{\sum_{a=1}^n N_a^p(\xi) w_a} \quad (2)$$

ここで、 ξ は軸方向に沿う座標値、 w_i は形状を制御するためのコントロールポイントにおける重み、 p は関数の次数、 n はコントロールポイント数、 $N_i^p(\xi)$ は B-Spline 基底関数と呼ばれる再帰的な関数であり、式(3a), (3b)で表される。

・ $p = 0$ の場合

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3a)$$

・ $p \geq 1$ の場合

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (3b)$$

ここで、 ξ_i はノットと呼ばれるパラメータであり、曲線上の要素の境界を表す局所座標値である。

3. 仮想仕事式と離散化式

曲線ベルヌーイ・オイラーはりのひずみの定義⁴⁾ 式(4)を用いて、せん断ひずみ=0 の条件を適用した仮想仕事の原理⁵⁾ 式(5), (6) に代入し、Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した。

離散化式は NURBS が C^{p-1} 連続であり、微分しても要素間の連続性は自動的に保持されるという考えから、未知変数にたわみ角を含まず式(7)のように構成した。

$$\varepsilon = u' + \frac{v}{\rho}, \quad \kappa = \theta', \quad \theta = -v' + \frac{u}{\rho} \quad (4)$$

$$\int_0^L (\varepsilon^* N + \kappa^* M) d\xi = \int_0^L (u^* f_u + v^* f_v) d\xi + [\varepsilon^* \bar{N} + \kappa^* \bar{M}]_r \quad (5)$$

$$N = \varepsilon EA, \quad M = \kappa EI \quad (6)$$

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(x) u_i, \quad v(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(x) v_i \quad (7)$$

ここで、 u は軸方向変位、 v は軸直交方向変位、 ρ は曲率半径、 θ はたわみ角、 $'$ は ξ で 1 階微分した値、 $*$ は重み関数、 $\bar{\quad}$ は境界値、 ε は膜ひずみ、 κ は曲げひずみ、 N は軸力、 M はモーメント、 E はヤング率、 A は断面積、 I は断面二次モーメント、 f_u は軸方向の分布荷重、 f_v は軸直交方向の分布荷重である。

4. 解析条件

解析モデルと境界条件を Fig.1 に示す。軸直角方向 η に等分布荷重が作用する単純支持の 1/4 円弧ばりを対象に解析を行った。ヤング率は $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、断面積は $A = 0.02 \text{ m}^2$ 、断面二次モーメントは $I = 1.667 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ とした。

解析ケースは、NURBS 基底関数の次数が 2 次～4 次、要素数は 1, 2, 4, 8, 16 要素で検討を行った。

また、仮想仕事の原理 (式(5)) の要素係数行列の計算には数値積分 (ガウス求積法) を用い、全ての解析ケースで積分点数を 10 点とした。

5. 解析結果

方程式を解いて得られた解を式(6)に代入し、変位の関数を得た。4次1要素の軸方向 ξ 、軸直交方向 η の変位分布を理論解(式(8.1),(8.2))と比較したものをFig.2に示す。4次のNURBS基底関数を用いたとき、変位の方に関わらず1要素でも理論解に漸近する変位分布が得られた。

$$u_{exact} = \frac{f_u}{2EA} \left\{ -1 + \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + (-1 + \theta) \sin \theta \right\} + \frac{f_u \rho^2}{2EI} \left\{ -3 + \frac{\pi}{2} + 2\theta + \left(3 - \frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + (-3 + \theta) \sin \theta \right\} \quad (8.1)$$

$$v_{exact} = \left(\frac{f_v}{2EA} + \frac{f_v \rho^2}{2EI} \right) \left\{ -2 + \left(2 - \frac{\xi}{\rho} \right) \cos \frac{\xi}{\rho} + \left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{\rho} \right) \sin \frac{\xi}{\rho} \right\} \quad (8.2)$$

次に、方程式で得られた解から求めた変位の関数をはり全体で90等分し、式(9)を用いて理論解との相対誤差を求めた。

$$\text{Relative error} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} \frac{(U_i - U_{i,exact})^2}{(U_{i,exact})^2}} \quad (9)$$

ここで、 m は分割数(本研究は $m=90$ とした)、 U_i は着目方向の変位、 $U_{i,exact}$ は着目方向の変位の理論解である。

軸直交方向 η について、はりの長さを L 、等分割した1つの要素の長さを h としたときの要素長 h/L を横軸に取ったときのはり全体における理論解との相対誤差をFig.3に示す。NURBS基底関数の次数の累乗に比例して理論解との相対誤差が単調減少する結果が得られた。また、次数が2次から3次になると要素数は1/4で済み、3次から4次になると要素数は1/2で済み結果が得られた。

また、軸方向 ξ についても同程度の相対誤差が得られることを確認した。

6. まとめ

本研究は細長い曲線部材のアイソジオメトリック解析のために、2次元平面において変位のみを未知変数に有する曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素を構築し、水圧荷重の作用する円弧ばりを対象に要素の性能を評価した。従来のベルヌーイ・オイラーはり要素と異なり未知変数にたわみ角を含ませていないが、高次のNURBS基底関数を用いれば少ない要素数でも理論解に漸近する解を得られることを確認した。また要素性能評価を行った結果、理論解との相対誤差は要素長の減少に伴って次数の累乗に比例して単調減少することが分かった。

参考文献

- 1) J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.
- 2) 山田貴博 : 高性能有限要素法, 丸善, 2007.
- 3) 唐澤奈央子, 長谷部寛 : スプライン関数の特性を考慮したIGAはり要素の構築, 令和3年度土木学会全国大会第76回年次学術講演会講演概要集, CS5-06, 2021.
- 4) V. Slivker : Mechanics of Structural Elements : Theory and Applications (Foundations of Engineering Mechanics),

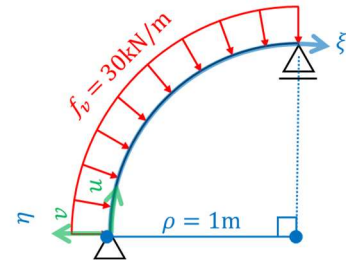
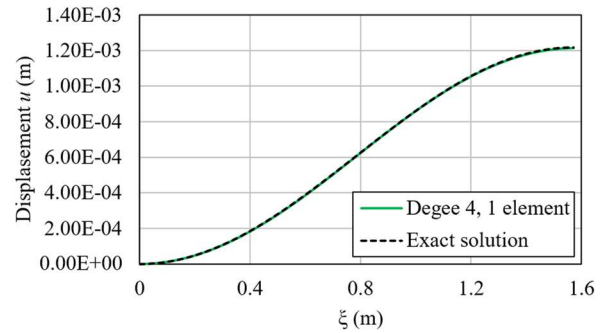
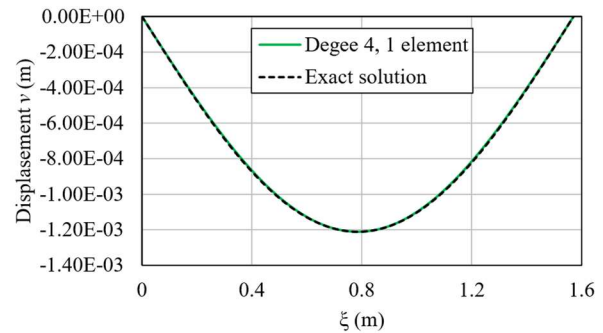


Fig.1 Computational model and boundary conditions



(a) Displacement u



(b) Displacement v

Fig.2 Distribution of displacement along the beam with uniformly distributed loading

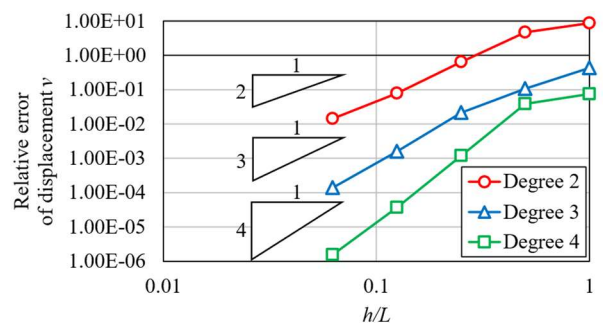


Fig.3 Convergence rate of the curved Bernoulli-Euler beam element

Springer, 2010

- 5) V F. Armero : Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff rods. I: The linear plane case, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 213–216, 427–457, 2012