

FFT 均質化アルゴリズムに基づく高解像度マルチスケルトポロジー最適化

High-resolution Multi-scale Topology Optimization Using FFT-based Homogenization

松井 聖圭 (名古屋大・工) 干場 大也 (名古屋大・工) 小倉 大季 (清水建設) 加藤 準治 (名古屋大・工)
 Masayoshi Matsui, NAGOYA University
 Hiroya Hoshiba, NAGOYA University
 Ogura Hiroki, SHIMIZU Corporation
 Junji Kato, NAGOYA University
 E-mail: matsui.masayoshi.w2@s.mail.nagoya-u.ac.jp

Multi-scale topology optimization has been paid attention to in many engineering fields. However, its high computational cost prevents practical use. In this study, to solve this problem, we focus on the homogenization approach using fast Fourier transform and develop a new optimization method with fast computing speed and low memory requirement. By performing sample analyses, we demonstrate the validity and efficiency of the proposed method.

1. 研究の背景・目的

近年、積層造形技術の発展により、構造物の形状（マクロ構造）だけでなく材料の微視構造（ミクロ構造）を制御し、目的の特性を持つ材料を製造することが可能になりつつある。そのため、最適なミクロ構造を設計するマルチスケルトポロジー最適化¹⁾が注目を集めているが、これを実設計に適用するには課題が多い。特に、ミクロ構造解析の高い計算コストは、高解像度での解析や非線形問題への拡張の妨げとなっている。本研究は、これを解決するため、高速フーリエ変換 (FFT) を用いた均質化手法²⁾に着目し、より高速で省メモリな新しい最適化手法を提案する。線形弾性材料を想定した剛性最大化問題を対象に、既往手法との比較に基づく性能検証を行い、提案手法の妥当性を確認するとともに、計算コスト削減への効果について検証する。

2. 分離型マルチスケール解析手法および数値材料試験

本研究で扱う解析手法は、マクロ境界値問題とミクロ境界値問題を別々に解く分離型マルチスケール解析手法³⁾を基礎としている。これは、周期的な非均質体であるミクロ構造を巨視的に捉えたときに等価となる均質体を考え、マクロ構造をその均質体の材料特性を有するものとして解析を行う手法であり、均質体の材料特性は数値材料試験により求められる。

ミクロ境界値問題は、ミクロ構造の1周期を取り出した矩形領域であるユニットセル Y を対象に定義される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{y}) &= \mathbf{0} \\ \sigma(\mathbf{y}) &= \mathbb{C}(\mathbf{y}) : \varepsilon(\mathbf{y}) \\ \varepsilon(\mathbf{y}) &= \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{y} \in Y \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}^{[d]}(\mathbf{y}) + \mathbf{t}^{[-d]}(\mathbf{y} - \mathbf{L}^{[d]}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y} - \mathbf{L}^{[d]}) &= \mathbf{E} \mathbf{L}^{[d]} \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{y} \in \partial Y^{[d]} \quad (2)$$

ここで、式 (1) はユニットセル Y における平衡方程式・材料構成則・適合条件式であり、式 (2) はユニットセル境界 $\partial Y^{[d]}$ において満足すべき周期境界条件である。

数値材料試験では、ユニットセルに対し単位マクロひずみ $\mathbf{E}^{(pq)}$ を与える。ここで、 (pq) は与えるマクロひずみの方向を表しており、例えば二次元問題の場合、次式に示す3通りとなる。

$$\mathbf{E}^{(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

次に、それぞれのマクロひずみ $\mathbf{E}^{(pq)}$ を与えた場合について、前述のミクロ境界値問題を解き、対応するマクロ応力 $\Sigma^{(pq)}$ を求める。そして、均質化弾性テンソル $\mathbb{C}^H$ を次式により計算する。

$$\mathbb{C}^H = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{1111}^H & \mathbb{C}_{1122}^H & \mathbb{C}_{1112}^H \\ \mathbb{C}_{2211}^H & \mathbb{C}_{2222}^H & \mathbb{C}_{2212}^H \\ \mathbb{C}_{1211}^H & \mathbb{C}_{1222}^H & \mathbb{C}_{1212}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{(11)} & \Sigma_{11}^{(22)} & \Sigma_{11}^{(12)} \\ \Sigma_{22}^{(11)} & \Sigma_{22}^{(22)} & \Sigma_{22}^{(12)} \\ \Sigma_{12}^{(11)} & \Sigma_{12}^{(22)} & \Sigma_{12}^{(12)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. FFT に基づく均質化アルゴリズム

前章で説明した数値材料試験は、通常、有限要素法 (FEM) により解かれる。一方で、本研究が着目する高速フーリエ変換 (FFT) に基づく均質化手法は、数値材料試験を解くための代替手法であり、反復計算からなるアルゴリズムを手続き的に書き下すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \text{initialize : } & \varepsilon^0(\mathbf{y}) = \mathbf{E} \quad \forall \mathbf{y} \in Y \\ \text{iterate : } & \varepsilon^k(\mathbf{y}) \text{ is known} \\ (a) & \sigma^k(\mathbf{y}) = \mathbb{C}(\mathbf{y}) : \varepsilon^k(\mathbf{y}) \\ (b) & \text{if } \frac{\|\Sigma^k - \Sigma^{k-1}\|}{\|\Sigma^k\|} < \bar{\varepsilon}_{\text{homo}} \text{ break} \\ (c) & \tau^k(\mathbf{y}) = \sigma^k(\mathbf{y}) - \mathbb{C}^0 : \varepsilon^k(\mathbf{y}) \\ (d) & \hat{\tau}^k(\psi) = \mathcal{FF}\mathcal{T}(\tau^k(\mathbf{y})) \\ (e) & \varepsilon^{k+1}(\psi) = -\hat{\mathbb{C}}^0(\psi) : \hat{\tau}^k(\psi) \quad \forall \psi \neq \mathbf{0} \\ & \varepsilon^{k+1}(\mathbf{0}) = \mathbf{E} \\ (f) & \varepsilon^{k+1}(\mathbf{y}) = \mathcal{FF}\mathcal{T}^{-1}(\varepsilon^{k+1}(\psi)) \end{aligned} \quad (5)$$

4. マクロ構造の線形剛性最大化を目的とするミクロ構造の最適化問題

マクロ構造の線形剛性を最大化するミクロ構造のトポロジー最適化問題を次式に示す。

$$\text{minimize : } f(\mathbf{s}) = \int_{\partial X_F} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6)$$

$$\text{subject to : } h(\mathbf{s}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{s}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad (7)$$

$$0 \leq \mathbf{s}(\mathbf{y}) \leq 1 \quad (8)$$

ここで、目的関数 $f(\mathbf{s})$ は平均コンプライアンスであり、これを最小化することは剛性最大化と等価となる。制約

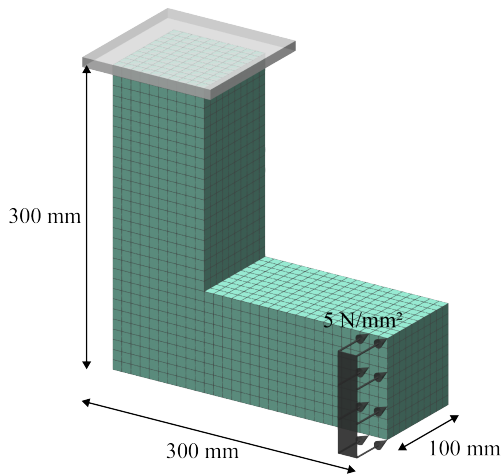


Fig. 1 Boundary conditions of the macro structure

関数 $h(s)$ は体積制約条件であり、ユニットセル Y における材料体積分率が一定であることを表している。

5. 数値計算例および手法の性能検証

前章で示したマイクロ構造の最適化問題について、数値材料試験を従来のように FEM で解いた場合（従来手法）と FFT で解いた場合（提案手法）の最適化結果および実行性能を比較する。使用した CPU は Intel Xeon Gold 6136 (12T24C, 3.0 GHz) であり、OpenMP によるスレッド並列計算を行った。搭載しているメインメモリは 192 GB である。

解析対象としたマクロ構造とその境界条件を Fig. 1 に示す。マクロ構造を構成する有限要素は 20 節点六面体要素であり、要素数は 5000 である。ユニットセルは各辺の長さおよび要素分割数（以下、解像度と呼ぶ）が等しい立方体であり、従来手法ではマクロ構造と同様の有限要素に、提案手法ではフーリエ変換における標本点（ボクセル要素）に離散化されている。解像度は FFT の効率性から 2 のべき定数とし、Table 1 に示す 16 から 128 までの値とした。

ユニットセルは空隙を含まない二層複合材料で構成されており、それぞれの材料パラメータを Table 2 に示す。

従来手法および提案手法により求めた最適化されたトポロジーを Fig. 2 に示す。ただし、解像度が 32 の場合を代表とした。これらから、提案手法を用いた場合であっても従来手法とほとんど同一のトポロジーが得られることが読み取れる。

ユニットセルの解像度と最適化ステップあたりの平均計算時間の関係を Fig. 3 (a) に、解像度と最大メモリ使用量の関係を Fig. 3 (b) に示す。ただし、従来手法ではメモリ要求量が搭載量を超過してしまうため、解像度の最大値は 32 とした。解像度が 32 のときに着目すると、提案手法を用いることで計算時間は 1/20 以下に、メモリ使用量は 1/10 以下に削減されている。加えて、提案手法はグラフの傾きが緩やかであり、解像度の増加に対する計算コストの増加が小さいことが読み取れる。

6. 結論

本研究は、既往の最適化手法の計算コストの削減を目的として、FFT 均質化アルゴリズムに基づくマルチスケールトポロジー最適化手法の開発を行った。提案手法

Table 1 Unit cell resolution and number of elements

unit cell resolution	16	32	64	128
number of elements	4096	32768	262144	2097152

Table 2 Material parameters

	phase-A	phase-B
Young's modulus (GPa)	1	100
Poisson's ratio	0.3	0.3
volume fraction (%)	70	30

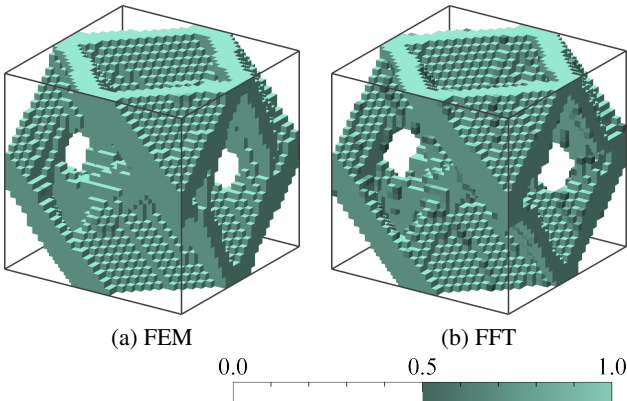


Fig. 2 Optimizes topologies (resolution: 32, elements: 32768)

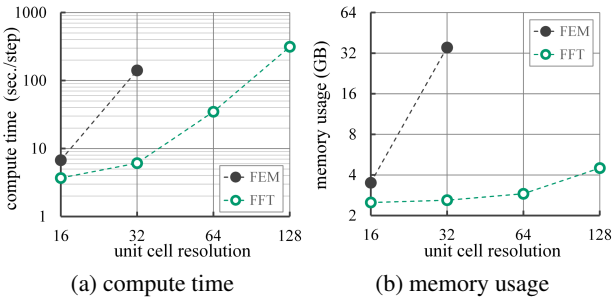


Fig. 3 Relation between computational costs and resolution

を用いることで既往手法と同様の最適化結果をより速く、より少ないメモリで求められることを定量的に示した。加えて、提案手法が特に高解像度の解析に効果的であることを明らかにした。

参考文献

1) J. Kato, D. Yachi, K. Terada, T. Kyoya: Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis, Struct. Multidisc. Optim., 49, pp.595-608, 2014.
2) H. Moulinec and P. Suquet: A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 157, pp.69-94, 1998.
3) K. Terada, J. Kato, N. Hirayama, N. Inugai, K. Yamamoto: A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, Comput. Mech., 52, pp.1199-1219, 2013.