

せん断遅れによる付加的な応力評価のための 機械学習による断面特性推定

Estimation of cross-sectional characteristics by machine learning for evaluation of additional stress due to shear lag

青木 洋樹 (東北大学) 齊木 功 (東北大学) 大竹 雄 (東北大学) 三井 涼平 (東北大学)

Hiroki AOKI, Tohoku University

Isao SAIKI, Tohoku University

Yu OTAKE, Tohoku University

Ryohei MITSUI, Tohoku University

FAX: 022-795-7441 E-mail: hiroki.aoki.s8@dc.tohoku.ac.jp

The distribution of bending stress along the direction perpendicular to the bridge axis on the flange of beams with a wide flange is not uniform due to shear lag. In the design of beams, the additional stress due to the shear lag is considered by reducing the bending rigidity by the effective width. However, it has been known that the shear lag is not caused by bending but by cross-sectional deformation associated with shear deformation. In this context, a beam theory with a degree of freedom of cross-sectional deformation due to shear is proposed to evaluate shear lag effect. While the beam theory considering cross-sectional deformation has been known to estimate shear lag effect accurately, a finite element analysis of representative volume of cross-section is required to obtain a couple of additional cross-sectional parameters. In this study, we propose a method to estimate the additional parameters using multiple regression analysis and Gaussian process regression. The accuracy of the proposed method is confirmed by a set of test data.

1. はじめに

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は、せん断遅れのために一様ではなく、ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる。道路橋示方書ではせん断遅れによる付加的な応力を、有効幅を用いて見かけ上の曲げ剛性を小さくすることで考慮している¹⁾。しかし、せん断遅れは曲げではなく、せん断変形に起因する断面変形によって生じる。

齊木・鄭²⁾は、せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論を提案している。以後これを断面変形梁理論と呼ぶ。この方法では、代表体積要素に一様せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード f として、 f から決定される断面パラメータを用いることで、せん断遅れによる付加的な応力を正確に求められる。しかし断面パラメータを求めるには断面の有限要素解析が必要である。そこで三井・齊木³⁾は、断面形状を変化させてパラメトリックスタディを実施し、有限要素解析を行わずに付加的な応力評価をするための、線形回帰による断面パラメータ推定式を提案した。

しかし断面パラメータと断面形状の関係は複雑であり、線形回帰による推定式の精度には限界がある。そこで本研究では、非線形な関係にも対応可能な機械学習を用いた、付加的な応力の評価をするための断面パラメータ推定法を提案する。

2. 断面変形を考慮した梁の軸ひずみ

断面変形梁理論²⁾によれば Fig. 1 のように単純支持されて等分布荷重 q を受けるときの軸ひずみの解析解は、

$$\epsilon_{11} = \frac{qz}{K_b} \left(\frac{1}{2} \ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) + q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \frac{e^{-\frac{k}{2} \ell x} + e^{\frac{k}{2} \ell x}}{e^{\frac{k}{2} \ell x} + e^{-\frac{k}{2} \ell x}} - q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \quad (1)$$

と表される。ここに、 e は Napier 数、 K_b は曲げ剛性、 k 、 K_{seq} は断面変形に関するパラメータ R_2 、 R_3 から得られる

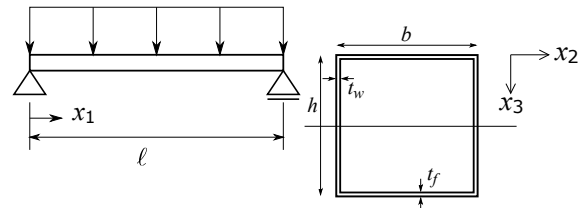


Fig. 1 等分布荷重を受ける単純梁

Fig. 2 箱断面

パラメータであり、 K_s をせん断剛性 GA として

$$k^2 = \frac{R_3 K_{\text{seq}}}{K_s R_2}, \quad K_{\text{seq}} = K_s - R_3 \quad (2)$$

という関係がある²⁾。ここに R_2 、 R_3 は

$$R_2 := \int_A E f^2 dA, \quad R_3 := \int_A G \{ (f_{,2})^2 + (f_{,3})^2 \} dA \quad (3)$$

と定義されており、支配方程式導出の過程で断面変形モード f から得られる²⁾。 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 A は断面である。 $(\cdot)_{,i}$ は梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とした時の x_i に関する偏導関数を表す。右辺の第 1 項は Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみ、第 2 項以降が断面変形に起因する付加的なひずみである。式 (1) に示すように、付加的な軸ひずみは f/K_{seq} と k によって決まる。なお、支持条件や荷重条件を変えても、上記の 2 つの変数によって断面変形に起因する付加的なひずみが決定されることは確認できている。

3. Gauss 過程による断面パラメータ推定

せん断遅れと横せん断による断面変形が曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として、Fig. 2 に示す単一材料の箱断面を選択する。 b は断面の幅、 h は断面の高さ、 t_f はフランジ厚、 t_w はウェブ厚を表す。この箱断面に対して、断面変形梁理論で採用する変位場に

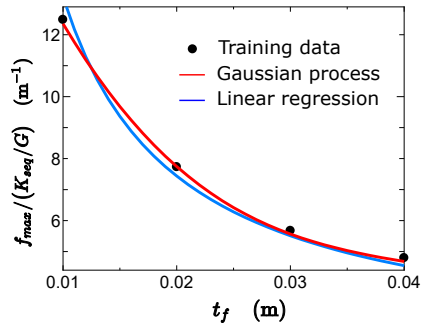


Fig. 3 断面パラメタ推定の一例

必要な断面変形モード f を求めるために、代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた⁴⁾。代表体積要素は1次6面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。

本研究では断面形状を入力値、それらに対する断面パラメタを出力値として学習に使用する、教師あり学習の回帰モデルを構築した。まず、 D 個の入力値からなる一般的な線形モデルは

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

と表される。 $\mathbf{x}$ は入力ベクトル、 $\mathbf{w}$ は D 次元の重みベクトル、 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ は基底関数である。 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ をあらかじめ設定し、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の学習データより $\mathbf{w}$ を推定するパラメトリックアプローチに対し、カーネル関数 k を導入することで $\mathbf{w}$ を求めず学習データに対する $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ を求めるノンパラメトリックアプローチをカーネル法と称する。本研究ではカーネル法の一方法である Gauss 過程回帰をモデルに用いた⁵⁾。Gauss 過程回帰はベイズ推定を用いる手法であり、出力が確率的に得られるモデルである。カーネル関数 k には Gauss(RBF) カーネル

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \theta_1 \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{\theta_2}\right) + \theta_3 \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (5)$$

を用いた。 θ_i はハイパーパラメータであり、最尤推定を行うことで決定した。学習データが N 個あり、予測したいデータが M 個ある場合を考える。学習データの入力を $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ 、新しく予測するデータの入力を $\mathbf{X}^* = (\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_M^*)$ 、学習データの出力を $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 、新しく予測するデータの出力を $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_M^*)$ とする。学習データ同士の類似度を表す行列を $\mathbf{K}$ 、推定したい入力と学習データの類似度を表す行列を $\mathbf{k}_*$ とした時、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{k}_*$ はカーネル関数から

$$\mathbf{K}(n, n') = k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n'}) \quad (n = 1, \dots, N, \quad n' = 1, \dots, N) \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_*(n, m) = k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m^*) \quad (n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M) \quad (7)$$

と決定される。この時新しく予測する出力の期待値は

$$E[\mathbf{y}^*] = \mathbf{k}_*^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y} \quad (8)$$

と表される。

本研究では Gauss 過程を用いて、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ 、 R_2 、 R_3 を出力 $\mathbf{y}$ として推定した。 $f_{\max}$ はフランジ上面の断面変形モード f の最大値であり、その位置で付加的なひずみが最大となる。これらの3つのパラメタが推定できれば、断面変形を考慮したたわみや軸ひずみの評価ができる。 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ の推定では b/h 、 t_f 、 t_w を入力 $\mathbf{x}$ とし、 R_2 、 R_3 の推定では、 b 、 h 、 t_f 、 t_w を入力 $\mathbf{x}$ とした。 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ の推定における入力値は、三井・斉木³⁾によるパラメトリックスタディを参照して決定した。

ここに、断面パラメタ推定の一例を Fig. 3 示す。 $b =$

Table 1 ウェブ上軸ひずみの相対差の絶対値平均 (支間中央)

本提案	線形回帰	示方書
5.2×10^{-4}	9.7×10^{-4}	3.8×10^{-2}

2 m, $h = 1$ m, $t_w = 0.01$ m とし、 $0.01 \text{ m} \leq t_f \leq 0.04 \text{ m}$ の範囲で t_f を変化させて $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ を推定したものである。なお、パラメタはせん断弾性係数 G で正規化した。Fig. 3 から、Gauss 過程の方が学習データに対する当てはまりが良いことがわかる。

4. 付加的なひずみの評価

Gauss 過程の回帰モデルの推定能力を検証するために、学習データとは別にテストデータを20種類用意した。テストデータはランダムに生成した断面形状と、それに対するパラメタである。精度の検証として Fig. 1 に示す単純支持梁の境界値問題を考え、 $\ell = 20$ m として、推定したパラメタから求めた軸ひずみを、断面変形梁理論²⁾によるものと比較する。なお、比較対象とした断面変形梁理論²⁾による軸ひずみが、通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を高い精度で再現できることはわかっている^{2,3)}。推定精度は、三井・斉木³⁾により提案された線形回帰による方法と、道路橋示方書¹⁾で比較した。なお、道路橋示方書によるひずみは有効幅を用いて断面形状を定義し、Euler 梁により求めた。断面変形梁理論²⁾を基準とした20種類のテストデータの支間中央における軸ひずみの相対差の絶対値平均を Table 1 に示す。Gauss 過程による推定を用いることで、示方書や線形回帰による方法よりもよい精度で断面変形梁理論²⁾による軸ひずみを再現できた。

5. 結論

箱断面を対象に、断面変形梁理論²⁾で用いる断面パラメタを、有限要素解析の代わりに機械学習により推定し、せん断遅れによる付加的なひずみを、これまでに提案された線形回帰による方法³⁾より高精度に評価できた。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ鋼橋・鋼部材編，2017。
- 2) 斉木功，鄭勲：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2，Vol.77，No.1，pp.1-11，2021。
- 3) 三井涼平，斉木功：断面変形梁理論に基づくせん断遅れによる付加的な応力の評価，令和2年度東北支部技術研究発表会，I-30。
- 4) 斉木功，藤本竜太，山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察，土木学会論文集 A2，Vol.74，pp.I.3-I.11，2018。
- 5) 持橋大地，大羽成征：ガウス過程と機械学習，講談社，2019。