

トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価のための LASSOによるクラック決定 (シンポジウム講演概要)

Determination of cracks using LASSO for QNDE with topological derivatives
(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

吉岡 朋紀 (京都大・工) 吉川 仁 (京都大・情報)

Tomoki YOSHIOKA, Kyoto University

Hitoshi YOSHIKAWA, Kyoto University

E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp

In a non-destructive estimate using topological derivatives, candidate cracks are found from the distribution of the toological derivatives. A determination of correct cracks from the candidate cracks using LASSO is considered in the paper. We compute the coefficient matrix using BEM for 2D Laplace crack problems in two ways and determine the correct cracks solving the algebraic equation for the sparse vector.

1. はじめに

本研究では、2次元散乱波動場でのトポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価への応用を意識し、圧縮センシングの代表的な手法である LASSO(L1 最適化手法)^{1)–3)} を用いて、2次元無限領域に存在するクラックの位置を決定する問題を考える。服部・吉川の先行研究⁴⁾ では、トポロジー導関数の分布を用いて向きや長さが決定されたクラックの候補を選び出し、候補クラックの配置ごとに目的汎関数を計算し、目的汎関数の値が最小となる候補クラックの組み合わせをクラック配置として決定する逆解析を行っている。しかし、候補クラックの数が多い場合には、目的汎関数の計算に多くの計算量を要するという課題が存在している。そこで本研究では、先行研究におけるトポロジー導関数の分布から推定される候補クラックから LASSO を用いて正解のクラックの決定を試みる。

2. LASSO を用いたクラック決定

2.1. スパースモデリングによるクラック決定

Fig. 1 のような N 本のクラック S_j , $j = 1, \dots, N$ を持つ 2次元無限領域 $\mathbb{R}^2$ におけるポテンシャル u についての次の境界値問題を考える。

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus S \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = 0, \quad x \in S \quad (2)$$

$$\phi(x) = 0, \quad x \in \partial S \quad (3)$$

$$u(x) \rightarrow u^\infty(x) \text{ as } |x| \rightarrow \infty \quad (4)$$

ここに、 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$ で、 $\mathbf{n}$ はクラックの単位法線ベクトル、 ϕ はクラックの開口変位で $\phi = u^+ - u^-$ 、 $u^\pm$ はクラックの法線が向いている (向いていない) 方向のポテンシャル u のクラックへの法線方向の極限である。また、 u^∞ は遠方でのポテンシャルで既知関数である。このとき、クラックの開口変位と問題の解は次の積分方程式 (5), (6) で得られる⁵⁾。

$$\frac{\partial u^\infty(x)}{\partial \mathbf{n}_x} = -\text{p.f.} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(x, y) \phi(y) dS_y, \quad x \in S \quad (5)$$

$$u(x) = u^\infty(x) + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) \phi(y) dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus S \quad (6)$$

ここに、p.f. は発散積分の有限部分、 G は 2次元ラプラス

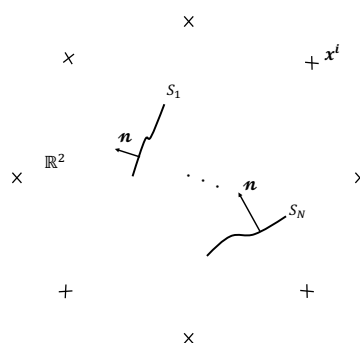


Fig. 1 Crack problem for 2D Laplace eq.

方程式の基本解であり、

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y| \quad (7)$$

である。

Fig. 1 の N 本のクラックを、先行研究⁴⁾ においてトポロジー導関数の分布から得られる候補クラックであるとする。正解のクラックの本数を $K (< N)$ として、領域 $\mathbb{R}^2 \setminus S$ 内の $M > N$ となる M 個の観測点 x^i , $i = 1, 2, \dots, M$ で計測されたポテンシャル $u^{\text{mes}}(x^i)$ より、正解の K 個のクラックを決定する問題を考える。具体的には次の代数方程式を K -スパースなベクトル ξ について解く。

$$A\xi = \mathbf{b} \quad (8)$$

$$\{A\}_{ij} := \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x^i, y) \phi(y) dS_y \quad (9)$$

$$\{b\}_i := u^{\text{mes}}(x^i) - u^\infty(x^i) \quad (10)$$

2.2. 係数の選定

代数方程式 (8) において、候補クラックの開口変位 $\phi(y)$, $y \in S_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ を求めることができず、係数 $\{A\}_{ij}$ を一意に決めることはできない。実際、正解でない候補クラックは存在しておらず、そのクラックに対応する開口変位など存在しない。そこで本研究では、次の2つのケースを考えて係数行列 $\{A\}_{ij}$ を決定し、正解クラックを決める逆解析を行う。

(ケース 1)

領域 $\mathbb{R}^2$ に N 本の全ての候補クラックが存在してい

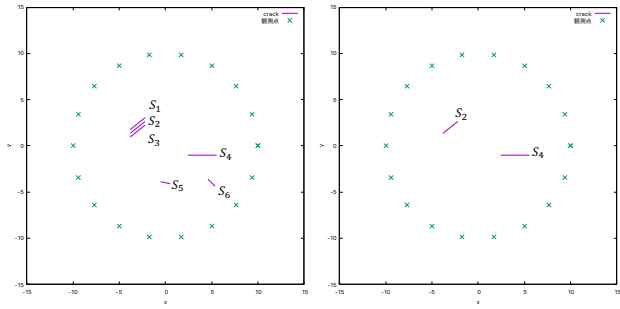


Fig. 2 候補クラック (左) と正解のクラック (右)

ると仮定し、式 (5) より各候補クラックの開口変位 $\phi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in S_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ を求め、その値を用いて係数行列 $\{A\}_{ij}$ を求める。このように求めた係数行列を A_{all} と呼ぶ。

(ケース 2)

領域 $\mathbb{R}^2$ に j 番目の候補クラックが 1 つだけ存在していると仮定し、境界積分方程式

$$\frac{\partial u^\infty(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_x} = -\text{p.f.} \int_{S_j} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S \quad (11)$$

より、開口変位 $\phi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in S_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ をそれぞれ求め、その値を用いて係数行列 $\{A\}_{ij}$ を求める。以下、このように求めた係数行列を A_{one} と呼ぶ。

2.3. LASSO を用いたクラック決定

座標勾配法を用いて、 $\arg\min_{\xi} \frac{1}{2} \|A\xi - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\xi\|_1$ となる最適なベクトル ξ^{opt} を計算する。なお、 $\|\cdot\|_2$ は L_2 ノルム、 $\|\cdot\|_1$ は L_1 ノルム、 λ はパラメータである。

3. 数値解析例

向きと長さが既知の 6 本の直線の候補クラック $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ ($N = 6$) を考える。候補クラックの中心の座標とクラック長と傾きは Table 1 の通りとする。 S_1, S_2, S_3 は近い位置に存在する同じ向きと長さをもつ候補クラックである。この候補クラックのうち、 S_2 と S_4 を正解のクラックとする。正解のクラックを未知として、LASSO により正解のクラックの決定を試みる。なお、半径が 10 の円周上等間隔に $M = 18$ 点の観測点 $\mathbf{x}^i$ を配置する。 $u^\infty(\mathbf{x}) = x_2$ とし、座標勾配法で用いたパラメータ λ の値は 10^{-12} とした。

Table 1 候補クラックの中心座標とクラック長と傾き

候補クラック	中心座標	クラック長	傾き
S_1	(-3.0, 2.4)	2.0	0.8
S_2	(-3.0, 2.0)	2.0	0.8
S_3	(-3.0, 1.6)	2.0	0.8
S_4	(4.0, -1.0)	3.0	0.0
S_5	(0.0, -4.0)	1.0	-0.2
S_6	(5.0, -4.0)	1.0	-1.0

2 つの係数行列 $A_{\text{one}}, A_{\text{all}}$ を用いてクラック決定を行った際の、各ベクトルの遷移は以下の Table 2, 3 のようになっ

Table 2 A_{all} を用いたクラック決定

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
ξ_1	0.4751	0.4602	0.4711	0.4710	—
ξ_2	0.4422	0.4444	0.4465	—	—
ξ_3	0.6028	0.6012	0.6002	0.7731	0.6851
ξ_4	1.6524	1.6513	1.6520	1.3460	0.9924
ξ_5	-0.0962	—	—	—	—
ξ_6	-0.0368	-0.0660	—	—	—

Table 3 A_{one} を用いたクラック決定

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目
ξ_1	0.2287	0.2177	0.2212	—	—
ξ_2	0.2682	0.2707	0.2713	0.7982	0.9723
ξ_3	0.4746	0.4731	0.4729	0.1191	—
ξ_4	0.5312	0.5310	0.5310	0.5307	0.5313
ξ_5	-0.1104	—	—	—	—
ξ_6	0.0004	-0.0465	—	—	—

た。 A_{all} を用いた場合は ξ_2 成分が 1 回目の最適化計算の段階から、 ξ_1, ξ_3 よりも小さな値となっている。正解であるはずの候補クラック S_2 が 3 回目の最適化計算段階で棄却されてしまい、正しく正解のクラックを推定できていない結果となってしまった。一方で、 A_{one} の場合は平行な 3 つの候補クラックである S_1, S_2, S_3 の中で、 S_1 をはじめに棄却できたために正しくクラックの位置を決定できた。

4. 結論

本研究では、LASSO を用いて 2 次元無限領域に存在するクラックの決定解析を行った。向きがバラバラで候補クラックがある程度離れた位置にある場合や候補クラックの向きが酷似し間隔が近い場合のいずれにおいても、候補クラックが 1 つずつ存在していると仮定して影響係数を求めることでクラックの位置を決定することができた。一方で、候補クラックが全て存在していると仮定して影響係数を求める場合、候補クラックの向きが酷似し間隔が近い場合は正解クラックの決定は困難であった。本研究ではラプラス方程式において正解のクラックを決定する問題を考えたが、先行研究⁴⁾では 2 次元散乱波動場で正解のクラックの推定を行っており、本研究のクラック決定手法が 2 次元散乱波動場においても同様に決定可能であるかどうか、さらにその精度を検討することも今後の課題である。

参考文献

- 1) R.Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the LASSO, *J. R. Statist. Soc. Ser. B*, Vol.58, No.1, pp.267-288, 1996.
- 2) 永原正章, LASSO のための凸最適化—近接勾配法による高速アルゴリズム, システム/情報/制御, Vol.61, pp.20-28, 2017.
- 3) 田中利幸, 圧縮センシングの数理, *IEICE Fundamentals Review*, Vol.4, No.1, pp.39-47, 2010.
- 4) 服部潤也, 吉川仁, 2 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いた様々なクラックの決定解析, 応用力学論文集 (特集号), 20, pp.255-262, 2017.
- 5) 小林昭一 他: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.