

点散乱源の相互作用における因果性の問題の考察 (シンポジウム講演概要)

A problem of causality during the interaction of point-like scatterers (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

東平光生 (東京理科大学) 丸山海航 (JR 東海コンサルタンツ)

Terumi Touhei, Tokyo University of Science
Kaito Maruyama, JR central consultants company
E-mail: ttouhei@rs.tus.ac.jp

It is known that the Foldy interaction model for point-like scatterers is very popular during this decade of research history. This paper deals with a problem of causality during interaction of point-like scatterers by means of the Foldy model. We investigate the distribution of eigenvalues of the operator of the scattering model on the complex frequency plane. We show that all of the eigenvalues are simple and present whole of the complex plane even on a lower half-plane. We show that the eigenvalues on a lower half-plane disturbs the causality of the scattered wave field.

1. はじめに

波動場の波長の空間スケールに比べ、散乱源の空間スケールが非常に小さい場合、散乱源は Dirac のデルタ関数を用いた点散乱源として数学モデルが構築される。歴史的にはこの散乱源のモデルは 1930 年代から Fermi の擬似ポテンシャル (pseudo potential) として原子核物理で用いられてきている¹⁾。Foldy は、点散乱源の分布の統計的な扱いを出発点として、点散乱源の相互作用における発散の問題を回避する手法を 1945 年に発表している²⁾。さらに、それから 50 年以上のちに、Hu and Sini は作用素論に基づく繰り込み理論によって、Foldy の相互作用モデルの正当化する試み³⁾もなされ現在に至っている。Foldy が論じているように、点散乱源の相互作用の問題は、核物理だけでなく、古典的な連続体力学においても、たとえば、花崗岩中の結晶による音波の散乱、水蒸気による光の散乱など、応用力学の場においても活躍の場が期待できる。

本研究では、Foldy モデルによる点散乱源の相互作用が、時間域での散乱波動にどのような影響を与えるかの考察を、Foldy モデルに付随して現れる方程式の固有値分布に着目し、Foldy モデルによる波動応答は、因果性を乱す成分を含んでいることを示す。

2. 場の基礎方程式ならびに Foldy による点散乱源の相互作用モデル

基礎方程式として次のスカラー場の波動方程式を扱う。

$$\left(\mu \nabla^2 - \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (1)$$

ここに、 μ はせん断弾性係数、 ∇^2 はラプラシアン、 ρ は質量密度、 $\mathbf{x}$ は空間座標、 u は変位場、 $\mathbf{x}$ は空間座標、 t は時間である。点散乱源の存在によって、質量密度は空間座標の関数である。波動場の質量密度は N 個の点散乱源で、次式のように表されると仮定する。

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_{\alpha}) \quad (2)$$

ここに、 ρ_0 はバックグラウンドの波動場の質量密度、 ρ_{α} は点散乱源の散乱強度、 $\mathbf{y}_{\alpha}$ は点散乱源の位置ベクトル、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数、点散乱源の記述に用いた添え字の α は点散乱源の識別に用いるパラメータである。Foldy²⁾ に基づき、基礎方程式として次式を用いる。

$$(\mu \nabla^2 + \rho(\mathbf{x}) \omega^2) \hat{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \quad (3)$$

ここで変位場の表記に用いた $\hat{\cdot}$ は関数が周波数域にあることを示す。

式 (3) の解を Green 関数で表現すると、次式となる。

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \omega^2 \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\alpha}) \hat{u}(\mathbf{y}_{\alpha}) + \hat{u}^{(I)}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{\alpha=1}^N \mathbf{y}_{\alpha}) \quad (4)$$

ここに、 $\hat{u}^{(I)}$ は入射波、 $\hat{g}$ は Green 関数で次式で表される。

$$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \exp(-ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (5)$$

ただし、 k はバックグラウンドの媒質の波数で

$$k = \omega/c, \quad (c = \sqrt{\mu/\rho_0}) \quad (6)$$

である。また c は波動伝播速度である。

式 (4) を用いて、波動場を決定するためには散乱源位置での $\hat{u}(\mathbf{y}_{\alpha})$ を知る必要がある。そのために $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_{\alpha}$ の極限移行によって、相互作用方程式を構成する。この極限移行のプロセスで Green 関数の特異性から、発散の困難が生じることになる。Foldy は点散乱源は自分自身とは相互作用を行わないとして発散を回避する。このとき、相互作用方程式は次式となる。

$$\sum_{\alpha=1}^N A_{\beta\alpha} \hat{u}(\mathbf{y}_{\alpha}) = \hat{u}^{(I)}(\mathbf{y}_{\beta}), \quad (\beta = 1, \dots, N) \quad (7)$$

ここに、 $A_{\beta\alpha}$ は相互作用方程式の係数行列で

$$A_{\beta\alpha} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ -\rho_{\alpha} \omega^2 \hat{g}(\mathbf{y}_{\beta}, \mathbf{y}_{\alpha}) & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (8)$$

となる。以下では、相互作用方程式を用いて波動場を決定し、Fourier 逆変換で時刻歴応答を構成する。そして係数行列の固有値分布から、その時刻歴応答を考察する。なお、時刻歴応答の考察においては、時間域の Green 関数が次式

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4\pi\mu} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}\right) \quad (9)$$

であることを用いる。

3. 数値計算例

解析モデルを Fig. 1 に示す。簡単のため、ここでは点散乱源の数を 2 とする。図中の赤のドットは振源の位置で原点に置く。また、青のドットは点散乱源の位置とする。簡単のため、点散乱源の数は 2 とし、図に示すように scatterer 1 と scatterer 2 として識別する。波動場は $\mu = 4 \text{ GPa}$, $c = 1.41 \text{ km/s}$, 点散乱源の強度を 0.1 mg とする。この条件の下で、点散乱源 1 に入射波が到達する時間は $1 \mu\text{s}$, 点散乱源 2 に入射波が到達し、そこで生じた散乱波が散乱源 1 に到達する時間は $4 \mu\text{s}$ となる。Fig. 1 では点散乱源間の距離を波動の到達時間で表現している。

振源においては外力として、次の時刻歴波形を与える。

$$f(t) = \exp(-at^2), \quad (a = 150[\mu\text{s}^{-2}]) \quad (10)$$

この時、Green 関数との合成積によって、時間域での入射波動場は次式となる。

$$u^{(I)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\mu|\mathbf{x}|} \exp\left(-a(t - |\mathbf{x}|/c)^2\right) \quad (11)$$

また、周波数域での入射波動場は

$$\hat{u}^{(I)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu|\mathbf{x}|} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a} - i\omega \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right) \quad (12)$$

となる。

Fig. 2 は相互作用方程式の係数行列の行列式がゼロとなる、複素平面上での点、すなわち

$$\det A_{\beta\alpha}(\omega) = 0 \quad (13)$$

を満たす ω (すなわち、固有値) をプロットしたものである。固有値の探索は Newton 法をベースとして、Newton 法で必要となる導関数の計算は Goursat の定理で周回積分で行った。また、固有値は複素上半平面のみならず、下半平面にも存在することが認められる。固有値は虚数軸に対称に分布する。二つの散乱源の強度が等しい場合には、この事実は数学的に証明可能である。

Fig. 3 は、散乱源 1 における時刻歴応答である。時刻歴応答は周波数応答を FFT で逆変換した結果と Fig. 2 の固有値を用いて留数定理から計算した結果を比較している。入射波到達前後の微小な振動も含め良好に一致している。Fig.3 の Time window では、scatterer 2 からの波動は到達しないはずである。また、式 (11) から入射波到達前後での微小な振動も本来はあり得ないはずである。詳細な考察は紙面の都合上、割愛せざるを得ないものの、これらの微小振動は、下半平面の固有値をからの寄与であり、非因果的なシグナルと考えることが可能である。

4. 結論

本研究では、Foldy モデルに伴う、散乱波動場の考察を行った。波動場の固有値が複素周波数平面の下半平面に存在することで、非因果的な挙動が散乱波動場で認められたことになる。しかし、Foldy モデルそのものは、統計論的な議論の上で構築されており、この意味でも点散乱源の分布は確率論的に扱うことが正当であろう。こうした観点で点散乱源の相互作用や因果性の問題に踏み込む必要があると考えられる。

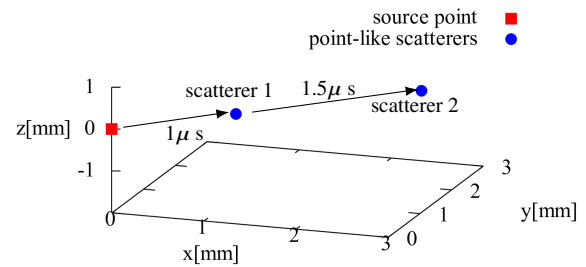


Fig. 1 Analyzed model

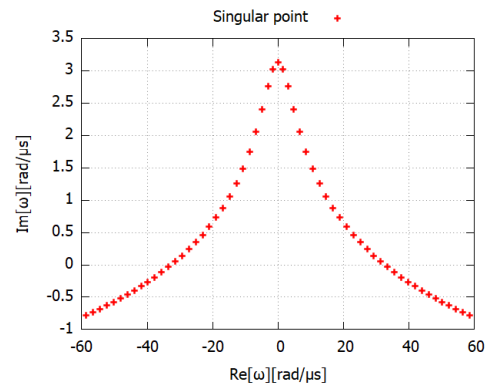


Fig. 2 Distribution of eigenvalues in the complex angular frequency plane

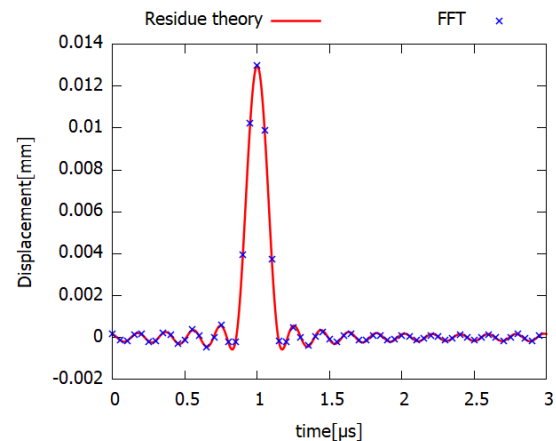


Fig. 3 Time history of response at the scatterer 1

参考文献

- 1) Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. and Holden, H.: Solvable models in quantum mechanics, Springer-Verlag, (1988).
- 2) Foldy, L.L.: The Multiple Scattering of Waves I, General theory of isotropic scattering by Randomly distributed scatterers, *Physical Review*, 67, 107-119, (1945).
- 3) Hu, G. and Sini, M.: Elastic scattering by finitely many point-like obstacles, *Math. Phys.* 54, 042901, (2013).