

任意断面に適用可能なねじりによる断面変形を考慮した梁理論 (シンポジウム講演概要)

A Beam Theory Considering Cross-Sectional Deformation Due to Torsion Applicable to Arbitrary Cross-Sections (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

須田 陽平 (国土交通省) 齊木 功 (東北大学)

Yohei SUDA, Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism

Isao SAIKI, Tohoku University

E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp

A beam theory with cross-sectional deformation due to torsion applicable to arbitrary cross-sections is proposed. In this theory, the magnitude of the warping, which is independent of the angle of twist, is introduced. The cross-sectional deformation mode is obtained numerically by a finite element analysis of the representative volume element with periodic boundary conditions. This homogenization process makes the present theory applicable to arbitrary cross-sections. The deformation mode is used to obtain the cross-sectional parameters appeared in the derived governing equations. The result of the proposed method for a beam with heterogeneous cross-section shows good agreement with the result of finite element analysis.

1. はじめに

曲げねじり理論では、そりによる軸方向変位はそり関数とねじり率の積で表される。近年では、そり関数に関する支配方程式を有限要素解析により解くことで任意形状断面の曲げねじりを解析する手法も提案されている^{1),2)}が、非均質断面への適用は示されていない。一方、著者らは代表体積要素に周期境界条件を表す相対変位を与え、非均質断面梁の曲げ・せん断・ねじりの巨視的剛性を評価する数値解析手法³⁾を提案している。さらに、この手法を基に、せん断による断面変形を表す独立な自由度を定義し⁴⁾、横せん断とせん断遅れの断面変形を統合した理論⁵⁾を提案している。以上を踏まえ、本研究では代表体積要素を用いて求めた非均質断面のそりを変位場に組み込み、そりの大きさをねじり率とは独立な自由度とした梁理論を構築する。

2. ねじりによる断面変形を考慮した梁理論の定式化

(1) 問題と変位場の設定

Fig. 1 に示す長さ l の長さ方向に一樣な任意形状断面の梁を解析対象とし、梁軸方向を x_1 とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を A 、ねじり中心を x_2, x_3 の原点とする。本論文では文献⁵⁾の変位場に倣い、ねじりによる断面変形に起因する梁軸方向の変位場を $f_i(x_2, x_3)$ とすることを提案する。梁のねじり角を $\varphi(x_1)$ 、断面変形 f_i のに対する一般化変位を $g_i(x_1)$ とすると、梁の変位場はそれぞれ

$$u_1 = f_i(x_2, x_3)g_i(x_1) \quad (1)$$

$$u_2 = -x_3\varphi(x_1) \quad (2)$$

$$u_3 = x_2\varphi(x_1) \quad (3)$$

と表すことができる。変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1 = f_i g_i' \quad (4)$$

$$\gamma_{12} = \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 = f_{i,2} g_i - x_3 \varphi' \quad (5)$$

$$\gamma_{13} = \partial u_1 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_1 = f_{i,3} g_i + x_2 \varphi' \quad (6)$$

となる。ここに、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i に関する偏導関数、 $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す。

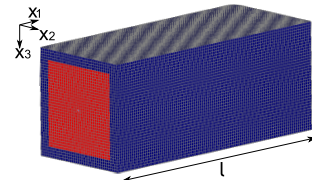


Fig. 1 解析対象と座標・領域の設定

(2) 支配方程式の定式化

解析領域を $V := L \times A$ とし、境界条件としての表面力 t_i を考慮した仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & \int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\}dV \\ & = \int_{\partial V} \{t_1\delta u_1 + t_2\delta u_2 + t_3\delta u_3\}dA \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。ここで ∂V は解析領域の境界面（梁の両端の断面）、 $\delta(\cdot)$ は $(\cdot)$ の仮想ひずみもしくは仮想変位を表す。上式に (4), (5), (6) を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_V \{E(f_i g_i')(f_i \delta g_i') + G(f_{i,2} g_i - x_3 \varphi')(f_{i,2} \delta g_i - x_3 \delta \varphi') \\ & + G(f_{i,3} g_i + x_2 \varphi')(f_{i,3} \delta g_i + x_2 \delta \varphi')\}dV \\ & = \int_{\partial V} \{t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2 + t_3 \delta u_3\}dA \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。上式を展開し、断面積分を実行すると、最終的に弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} & \int_L \{R_{t1} g_i' \delta g_i' + (R_{t2} g_i + R_{t3} \varphi') \delta g_i + (R_{t3} g_i + K_t \varphi') \delta \varphi'\} dx_1 \\ & = (\bar{D}_t \delta g_i + \bar{T} \delta \varphi) \Big|_{x=0,l} \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。ここに、 K_t, R_{ti} は

$$\begin{aligned} K_t &:= \int_A G \{(x_2)^2 + (x_3)^2\} dA, \quad R_{t1} := \int_A E f_i^2 dA, \\ R_{t2} &:= \int_A G \{(f_{i,2})^2 + (f_{i,3})^2\} dA, \\ R_{t3} &:= \int_A G (f_{i,3} x_2 - f_{i,2} x_3) dA \end{aligned} \quad (10)$$

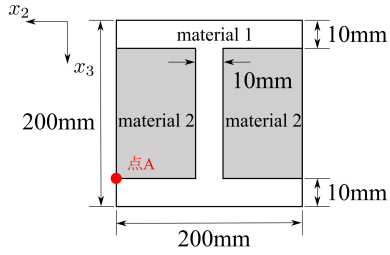


Fig. 2 非均質断面



Fig. 3 ねじり変位を受ける片持ち梁

で定義される断面パラメタである．また， $\bar{D}_t$ ， $\bar{T}$ は端部断面に作用する外力の合力で

$$\begin{aligned}\bar{D}_t &:= \int_A t_1 f_t dA, \\ \bar{T} &:= \int_A (x_2 t_3 - x_3 t_2) dA\end{aligned}\quad (11)$$

と定義した． $\bar{D}_t$ は断面変形に関する一般化外力， $\bar{T}$ はねじりモーメントである．弱形式の支配方程式 (9) から，強形式の支配方程式は

$$R_{t3} g'_t + K_t \varphi'' = 0 \quad (12)$$

$$-R_{t1} g''_t + R_{t2} g_t + R_{t3} \varphi' = 0 \quad (13)$$

となる．

3. 非均質断面梁による検証

Fig. 2 に示す非均質断面の梁を解析対象として提案梁理論の精度を検証する．材料 1, 2 は等方弾性体とし，材料 1 の Young 率とせん断弾性係数を $E_1 = 200$ GPa, $G_1 = 100$ GPa とし，材料 2 の Young 率とせん断弾性係数を $E_2 = 20$ GPa, $G_2 = 10$ GPa とした．

代表体積要素は 1 辺 2.5 mm の立方体形状の 6 面体 1 次アイソパラメトリック要素を用いてモデル化した．提案理論で採用する変位場に必要断面変形モード f_t は，有限要素離散化した代表体積要素に単位のねじり変形を与えることで求める．このとき結果として得られる x_2, x_3 各点の軸方向変位が f_t である．式 (10) で定義したパラメタは f_t を数値的に積分して求める．

Fig. 3 に示す片持ち梁の境界値問題を考え，通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする．本提案手法による数値解を参照解と比較してその精度・妥当性を評価する．長さ $L = 1,000$ mm とし，自由端に強制変位がねじり角 $\varphi = 1.0$ rad とする．

参照解のモデルにおいて，要素寸法は代表体積要素と同じとした．固定端は断面内全ての節点を完全拘束し，自由端の強制ねじり角 φ は u_1 を拘束せず，断面内全ての節点に x_2, x_3 方向の強制変位 $u_2 = -x_3 \varphi$, $u_3 = x_2 \varphi$ として与えた．

Fig. 2 に示す断面内の点 A における軸方向変位の軸方向分布を Fig. 4 に示す．軸方向変位は参照解の最大変位で無次元化している．固定端では断面のそりが拘束されているため軸方向変位は 0 だが， $x_1 = 0$ から $x_1 = 250$ にかけて軸方向変位が増加し，それ以降では

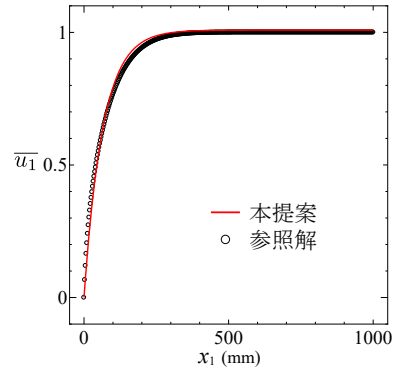
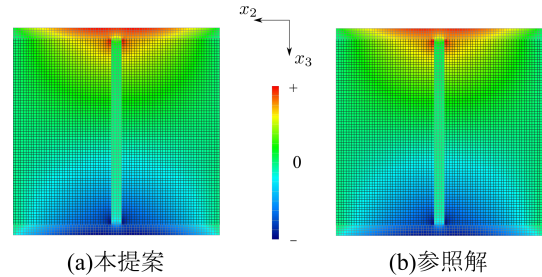


Fig. 4 軸方向変位分布

Fig. 5 せん断ひずみ γ_{12} 分布

自由端の変位に漸近している．本手法の軸方向変位分布は参照解と定性的に一致している．自由端での参照解との相対差は 8.5×10^{-3} ，軸方向分布の L^2 ノルムは 1.8×10^{-2} となった．ここで L^2 ノルムは，本手法による解 β_p と参照解 β_s により

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \quad (14)$$

と定義した．

本手法と参照解のせん断ひずみ γ_{12} 分布を Figs. 5 に示す．本手法による解は式 (5) と代表体積要素の数値解析から求めた $f_t(x_2, x_3)$ による．せん断ひずみ γ_{12} は材料 1 のフランジだけでなく，材料 2 にもフランジで生じている最大ひずみと同程度のひずみが生じている．また本手法と参照解のひずみ分布は定性的に一致していることがわかる．

参考文献

- Schulz, M. and Filippou, F. C.: Generalized warping torsion formulation, *Engineering Mechanics*, Vol.124, pp.339-347, 1998.
- Gruttmann, F. and Wagner, W.: Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections, *Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, pp.865-889, 1999.
- 斉木 功, 鐘 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会論文集 A2, Vol.68, No.2, pp.I.161-I.169, 2012.
- 斉木 功, 鄭 勲, 山本剛大: 断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.75, No.2, pp.I.3-I.12, 2019.
- 斉木 功, 鄭 勲: せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.