

土木工学分野における新しい非ガウス現象について（シンポジウム講演概要）

On a new non-Gaussian phenomenon in the civil engineering fields

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

佐藤 忠信（京都大学・名誉教授）
Tadanobu SATO, Kyoto University

The purpose of this paper is to introduce a new non-gaussian phenomenon in the civil engineering fields. We develop a method to calculate the earthquake motion phase as a function of the circular frequency without the unwrap procedure. First, we define a mean gradient of phase by dividing the phase difference with the circular frequency interval. We discuss the probability density characteristics of the mean gradient of phase and find it is obeyed the Levy-flight distribution, which means that the mean phase gradient is non-gaussian. We compare the autocorrelation characteristics of the mean phase gradient obtained from an observed acceleration time history and theoretically obtained autocorrelation characteristics by using the fractional Levy-flight process.

1. はじめに

非ガウス現象として特徴づけられる最も顕著な事例は、株価の対数収益率が Levy-flight 確率密度関数に従うことである。この結果、オプション価格の決定に用いられてきたブラックショールズの理論¹⁾が書き換えられている。また、流体の乱流解析では、拡散現象が重要な役割を果たし、ブラウン運動では説明しきれない異常拡散現象を解析するのに、Levy-flight 分布に従うランダムウォーク理論を用いて、乱流解析を行うのが主流になってきている。特に、プラズマの安定性に関して、Levy-flight 分布が重要な役割を持つようになってきている。また、Levy-flight 分布に従うランダムウォーク理論を用いた探索の最適化を行う研究²⁾も行われるようになってきている。こうした観点から、土木工学の分野において、Levy-flight 分布関数に従う新しい現象を解説するのが本研究の主目的である。

2. 観測加速度時刻歴から求められる位相特性

観測加速度時刻歴を $x(t)$ とし、そのフーリエ変換を $X(\omega)$ とする。 t は時間で、 ω は角振動数である。ここで用いる観測加速度時刻歴は 1973 年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された NS 成分で、提供されている離散時間間隔は 0.02 秒で、離散点個数は 15000 である。角振動数領域での分解能を上げるため、ゼロパディング操作を行った。すなわち、時刻歴の後半にゼロを付け加え、離散点総数を 2^{25} とした。角振動数領域での離散間隔を $d_0\omega$ とすれば、 $d_0\omega = 100\pi/2^{25}$ ラジアンとなる。この角振動数間隔で ω を離散化すれば、 $\omega_l = l \cdot d_0\omega$ と角振動数が離散化される。離散角振動数間隔を $k = 2^n$ 倍にした離散角振動数間隔を $\Delta\omega$ とすれば、 $\Delta\omega = k \cdot d_0\omega$ となる。一方、 $X(\omega) = R + iI = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$ と表現できる。 R と I はフーリエ変換の実数部と虚数部であり、 $A(\omega)$ と $\phi(\omega)$ はフーリエ振幅と位相である。

FFT で $X(\omega)$ を求めるとき、偏角位相を ϕ_A ラジアンとすれば、それは $\phi_A = \text{Arg}(X(\omega))$ として計算できる。Fig. 1 に釧路記録の ϕ_A を描画した、図から明らかになるように、 ϕ_A から角振動数の連続関数としての $\phi(\omega)$ を求めるには、 ϕ_A 値が $-\pi$ に近づいたとき、 π に近い値の ϕ_A に接続する操作が必要になる。すなわち、 π に近づいた ϕ_A から -2π を足込む操作を行わなければならない。これはアンラップ操作と名付けられている。角振動数は $d_0\omega$ 間隔で離散化されているので、 ω_l と ω_{l+1} で ϕ_A の値は、 $\phi_A(\omega_l)$ と $\phi_A(\omega_{l+1})$ となる。この場合、

$\phi_A(\omega_l)$ が $-\pi$ に近い値を取って、 $\phi_A(\omega_{l+1})$ の値が π に近い値を取るものとする。この場合は $X(\omega_l)$ が乗っているリーマ

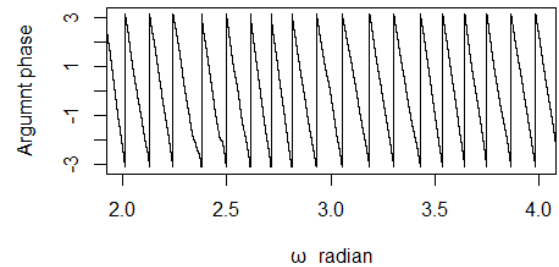


Fig.1 Argument phase ϕ_A (radian)

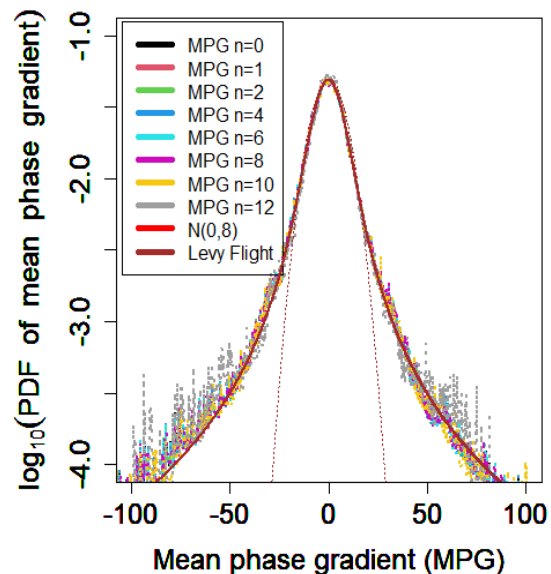


Fig.2 The probability density functions (PDFs) of MPG for Kushiro record with different circular frequency intervals that are defined by $(n = 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$. All PDFs are coincided together, and its theoretical PDF is defined by the origin symmetrical Levy-flight distribution function with parameters of $\alpha = 1.5$ and $\gamma = 5.9$ (brown colored line)

ン面が問題になる。もし、 $X(\omega_l)$ と $X(\omega_{l+1})$ が同じリーマン面上にあれば、 $\phi(\omega_l) = \phi_A(\omega_l)$ とし、 $\phi(\omega_{l+1}) = \phi_A(\omega_{l+1})$ とすればよい。そうでなければ、 $\phi(\omega_l) = \phi_A(\omega_l)$ とした上で、 $\phi(\omega_{l+1}) = \phi_A(\omega_{l+1}) - 2\pi$ としなければならない。これを可能にするのは、 $X(\omega_l)$ と $X(\omega_{l+1})$ が乗っているリーマン面の数を最初から正確に数え上げる必要がある。両者のリーマン面が同じなら、 $\phi(\omega_l) = \phi_A(\omega_l)$ で $\phi(\omega_{l+1}) = \phi_A(\omega_{l+1})$ となる。そうでなくて、 $X(\omega_l)$ の乗っているリーマン面の数が q で、 $X(\omega_{l+1})$ の乗っているリーマン面の数が $q+1$ であるのならば、 $\phi(\omega_l) = \phi_A(\omega_l)$ で、 $\phi(\omega_{l+1}) = \phi_A(\omega_{l+1}) - 2\pi$ とならなければならない。一方、リーマン面の数 q を正確に数え上げるのは困難なので、正接位相の定義である $\tan\phi(\omega) = (I/R)$ を用いて、次式の位相増分 $d\phi(\omega)$ を求める。

$$d\phi(\omega) = \frac{dI \cdot R - I \cdot dR}{R^2 + I^2} \quad (1)$$

さらに、 $d\phi(\omega)$ を ω に関して積分して、 $\phi(\omega)$ を求める。その上で、 $\phi(\omega)$ を線形遅れ部 $-\omega t_0$ とそこからの変動部 $\psi(\omega)$ に分解する。なお、以下の解析では、位相変動部 $\psi(\omega)$ を位相と名付け、その確率特性を考察する。そのため、 $\psi(\omega)$ の離散振動数間隔 $\Delta\omega$ での差分 $\Delta\psi(\omega)$ を次式で定義する。

$$\Delta\psi(\omega) = \psi(\omega) - \psi(\omega - \Delta\omega) \quad (2)$$

ω を $\Delta\omega$ 間隔で離散化したものを、改めて、 $\omega_l = l \cdot \Delta\omega$ と表わす。なお、次式で定義される $Y(\omega)$ を確率変数と考える。

$$Y(\omega) = \Delta\psi(\omega)/\Delta\omega \quad (3)$$

$Y(\omega)$ は ω の関数であるが、 $\Delta\omega$ の関数でもある。これを位相平均勾配と名付け MGP と呼ぶことにする。 $\Delta\omega = k \cdot d_0\omega = 2^n d_0\omega$ であったので、 $n = 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ と変化させた場合について、 $Y(\omega)$ の確率密度関数を描画したのが Fig.2 である。図から明らかになるように、 $Y(\omega)$ の確率密度関数は $\Delta\omega$ の大きさによらず、おおむね一致していることが分かる。これから、 $Y(\omega)$ がフラクタル特性³⁾を有していることが判明する。なお、赤点線は $N(0,8)$ であり、褐色太線はパラメーターが $\alpha = 1.5$ と $\gamma = 5.9$ で、原点対象のレヴィフライト確率密度関数⁴⁾で、 $s(\alpha, \gamma, Y)$ と表わされる。赤点線は $N(0,8)$ の正規分布である。これから、位相平均勾配(MGP)が非ガウス特性を有することが分かる。

3. 位相平均勾配の相関係数

$Y(\omega)$ を $\Delta\omega$ 間隔で離散化し、 $Y_l = Y(\omega_l)$ と置くと、これまでの研究成果⁵⁾に基づけば、 Y_l は次式で模擬できる。

$$Y_l = \gamma_L \left(\sum_{m=1}^L a_m Z_{l-m} + Z_l + \sum_{m=1}^L a_m Z_{l+m} \right) \quad (4)$$

$\{Z_l\}$ は標準レヴィフライト確率密度関数 $s(\alpha, 1, Z)$ より独立同分布で生成された乱数列であり、 a_m は次式で定義される。

$$a_m = \frac{1}{2} \{ (m+1)^\beta - (m-1)^\beta \} \quad (5)$$

ここに、 m は正の整数であり、 β は次式で与えられる。

$$\beta = 1 - 1/\alpha \quad (6)$$

なお、 Y_l はその構成から弱定常過程と考えてもよいので Y_l を任意の離散点 k だけシフトしたものは次式で表現できる。

$$Y_{l+k} = c \left\{ \sum_{l=1}^L a_l Z_{l+k-l} + Z_{l+k} + \sum_{l=1}^L a_l Z_{l+k+l} \right\} \quad (7)$$

これから、 Y_l の相関関数 $R(k)$ は次式で与えられる。

$$R(k) = E[X_l X_{l+k}] \quad (8)$$

相関係数 $\rho(k)$ は次式で定義できる。

$$\rho(k) = R(k)/R(0), \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad (9)$$

Fig.3 は釧路の加速度記録から $\psi(\omega)$ を求め、式(3)に基づいて $Y(\omega)$ の相関係数を数値的に求めた結果を薄水色のジグザク細実線で表示した。

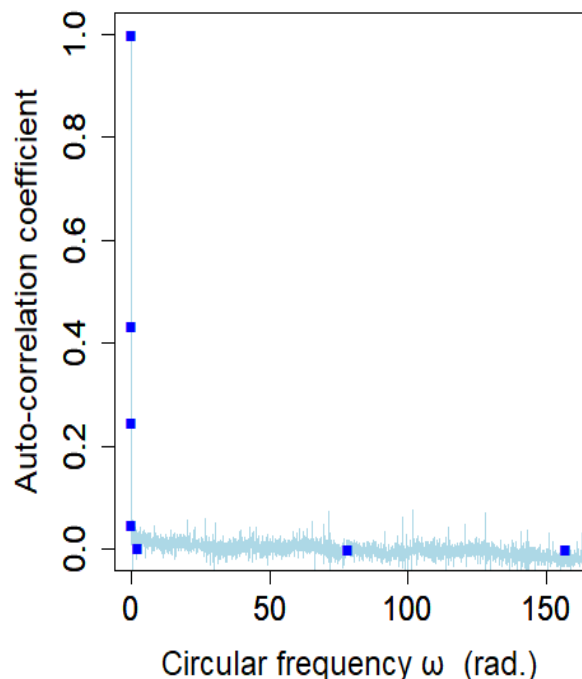


Figure 3. The autocorrelation coefficient of the mean gradient of Kushiro phase (zigzag light blue line) and theoretically derived one at the designated circular frequency (blue squares)

なお、 $k = 0, 2^2, 2^4, 2^{10}, 2^{18}, 2^{23}, 2^{24}$ 対して、式(9)に基づく理論的な相関係数を青■で描画した。いずれの相関係数もデルタ関数としての特性を有しているように見える。

4. 謝辞

本論文は科学研究費の補助（科研費番号#21K04242）を受けて実施された。また、用いた観測加速度記録は気象庁から提供されたものです。合わせて謝意を表します。

参考文献

- 1) Mikosch, T.,; *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd. 1998.
- 2) Viswanathan, G. M., Budyrev, S. V., Havlin, S., da Luz, M. G. E., Raposo, E. P. & Stanley, H. E.; *Optimizing the success of random searches*, Nature 401, 911–914, 1999.
- 3) Falconer, K. : *Fractal Geometry*, Mathematical Foundation and Application, 2nd ed. John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2003.
- 4) Nolan J. P. : *Stable Distribution: Models for Heavy Tailed Data*, (<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>), 2015 年 11 月. 13.日に閲覧.
- 5) 佐藤忠信：時震動位相差分の特異な確率特性と程一分散雄定義できない群遅延時間のモデル化一，土木学会論文集 A1(構造・地震工学)，Vol.73, No.2, 344-363, 2017.