

GIMP を用いた非圧縮性流体における陰的解析手法の開発 (シンポジウム講演概要)

Development of an Implicit Analysis in Incompressible Fluids Using GIMP (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

西藤 潤 (京都大・工) 中井 英治 (京都大・工)
高橋 由 (京都大・工) 藤井 遥 (京都大・工)

Jun SAITO, Kyoto University
Eiji Nakai, Kyoto University
Yu TAKAHASHI, Kyoto University
Haruka Fuji, Kyoto University
E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp

The final goal of this study is to perform seepage flow analysis in the ground using GIMP for both solids and fluids, and this study proposes a numerical analysis method for fluids as a preliminary step. The formulation proposed in this study does not require any special treatment of the free surface and can suppress the occurrence of clustering. As a benchmark test, the well-known dam-break problem was solved to confirm the validity of the proposed method.

1. はじめに

MPM(Material Point Method)¹⁾ は対象を粒子で空間離散化し、バックグラウンドセルを用いて解く数値解析手法である。大変形の計算に適していることから、地盤解析への適用事例が多い。最初に提案された MPM では、粒子がセルをまたぐ際に数値的不安定性が生じるセルクロッシングと呼ばれる問題があるため、粒子を点ではなく矩形領域として捉え不安定性を抑える GIMP(Generalized Interpolation Material Point)²⁾ と呼ばれる手法が提案されている。

地盤内の浸透流解析を解くために、地盤だけでなく流体も GIMP を用いて解く統一的な数値解析手法を開発することを最終的な目的とし、本研究では、その全段階として流体のみを GIMP で解く手法について提案する。本稿では、対象を 2 次元問題とし、uGIMP と呼ばれる矩形領域の変化しない GIMP を用いる。

2. 流体の計算

流体は非圧縮性を仮定し、連続式と Navier-Stokes の運動方程式を支配方程式とする。一般の MPM では、格子点(セルの頂点)で速度を定義するのに対して、流体の解析では、一般的なスタッガード格子を用いる。すなわち、セルの各面上で流速を定義し、セル中央で圧力を定義する。以下では、簡単のため、バックグラウンドセルにおける流体の速度、圧力を定義している点をまとめて格子点と呼び、下付き添え字 I で表すものとする。

2.1. Point to Grid

MPM では、粒子の物理量から格子点における物理量を計算するとき、補間の計算をするため、双線形な形状関数 $N_I(\mathbf{x})$ を用いて以下の関数を用いる。

$$S_{Ip} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \chi_p(\mathbf{x}) N_I(\mathbf{x}) d\Omega \quad (1)$$

V_p は粒子 p の体積である。オリジナルの MPM では、 $\chi_p(\mathbf{x})$ はデルタ関数として計算するが、GIMP では、粒子が領域を持っていると考える、 $\mathbf{x} \in \Omega_p$ において $\chi_p(\mathbf{x}) = 1$ とする。 Ω_p は、粒子 p を中心とするセルの領域を表している。今回提案する流体解析では、形状関数は双線形とせず、定数とする。つまり、 $\mathbf{x} \in \Omega_I$ において $N_I(\mathbf{x}) = 1$ とする。 Ω_I

は、流速あるいは圧力を定義する点(格子点)を中心とするセルの領域を表している。形状関数を一定とする場合の(1)の関数を S_{Ip}^* と表す。この関数 S_{Ip}^* は、セルにおける Ω_I と Ω_p の共通部分の面積の割合を表している。

粒子(p)から格子点(I)へ質量 m 、運動量 $\mathbf{p}$ を移す計算では、 S_{Ip}^* を用いて以下のように計算する。

$$m_I = \sum m_p S_{Ip}^* \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_I = \sum \mathbf{p}_p S_{Ip}^* \quad (3)$$

2.2. Grid to Point

格子点(I)における物理量を用いて、粒子(p)の物理量を補間するときは、 S_{Ip}^* ではなく、双線形の形状関数によって得られる通常の関数 S_{Ip} を用いる。

粒子の速度の更新方法は、格子点における速度そのものを使って補間する方法(PIC)と格子点における速度の差分を使って補間する方法(FLIP)が考えられる。一般的にこれらの計算法を混合して使うと数値的に安定することが知られているため、本研究では、FLIP によって計算した速度 $\mathbf{v}_{\text{FLIP}}$ と PIC によって計算した速度 $\mathbf{v}_{\text{PIC}}$ を用いて、以下のように重み付き平均で計算する。

$$\mathbf{v}_{\text{MPM}} = \alpha \mathbf{v}_{\text{FLIP}} + (1 - \alpha) \mathbf{v}_{\text{PIC}} \quad (4)$$

2.3. 圧力ポアソン方程式の導出

流体計算では、1 回のタイムステップにおいて、まず物体力や粘性項から中間速度 $\mathbf{v}^*$ を計算し、この中間速度を用いて非圧縮性の仮定から圧力を計算す、一般的な分離型解法を用いる。圧力ポアソン方程式は、以下に示す非圧縮性を制約条件とする以下のエネルギー最小化問題を離散化することで得られる³⁾。

$$\min_{\mathbf{p}} E = \int_{\Omega} \rho \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\|^2}{2\Delta t} d\Omega \quad (5)$$

$$\text{subject to } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (6)$$

この定式化では、自由表面の判定が不要であり、自由表面と領域内部を区別せず解くことが可能である。

2.4. SPH の勾配モデルを用いた圧力勾配項の計算

GIMP を用いた流体解析では、速度更新を FLIP や PIC を用いて行うため、粒子のクラスタリングが発生する。一般的な FLIP や PIC においても計算精度の点でクラスタリングの発生は好ましいことではないが、GIMP の計算においては質量や運動量を計算する過程が入るため、計算の破綻につながることもある。クラスタリングが発生すると密な領域や疎な領域が生じ、式 (2), (3) で計算される質量や運動量にばらつきが発生する。流体の非圧縮性を仮定しているため、本来は、流体の領域内部（自由表面の近くでない領域）では格子点における質量は一定であることが理想的である。

このクラスタリングを抑制するため、速度更新は SPH の勾配モデルを用いる。まず、それぞれの粒子の圧力を補間するため、圧力ポアソン方程式を解いて得られたセル中央の圧力の値から、最小二乗法を用いて圧力場の計算を行う。これを以下の SPH の勾配モデルに適用することで圧力勾配を求める。

$$\langle \nabla p \rangle_a = \sum_b (p_a + p_b) \nabla W_{ab} V_b \quad (7)$$

下付き添字の a, b は粒子を表している。また、 W は 5 次のスプライン関数である。圧力勾配を外力として作用させると、粒子間に斥力が働くため、クラスタリングの発生が抑制される。速度の更新は、式 (4) によって得られた速度と上述した SPH によって得られる速度 v_{SPH} を以下のように重み付き平均して速度を更新する。

$$v = \beta v_{\text{MPM}} + (1 - \beta) v_{\text{SPH}} \quad (8)$$

数値計算を行った結果、 $\beta = 0.1$ 程度でクラスタリングの発生が抑止されることが分かったので、本研究では $\beta = 0.1$ を用いる。ただし、壁面境界の速度の取り扱いには SPH よりも MPM の方が容易であることから、格子点上で流速が境界条件として与えられている場合は、その点の近傍において β の値を 1 に近い値とし、境界条件を満足させるようにする。

3. ダムブレイクの解析

Martin and Moyce⁴⁾ によって行われたダムブレイクの実験と本研究で提案している解法によって得られた数値解析結果を比較する。

3.1. 条件設定

縦 0.292m、横 0.146m の水中を幅 0.584m の水槽の中で崩壊させる。重力加速度 9.8m/s²、流体の密度 1000(kg/m³) とする。粒子間距離は 0.00365m で SPH 計算における影響半径はその 2.4 倍とした。粒子の数は 3200 個、解析における時間は 2s とし、時間幅は 0.00005s である。

式 (4) において、 $\alpha = 0.9$ としたときの流体のプロファイルと圧力分布を Fig. 1 に示す。また、流体の先端位置を Fig. 2 に示す。流体のプロファイルは他の研究と比較してよく似た形状をしており、先端速度も実験結果と良い一致を示している。また、結果より、粒子のクラスタリングが抑制されていることも確認した。

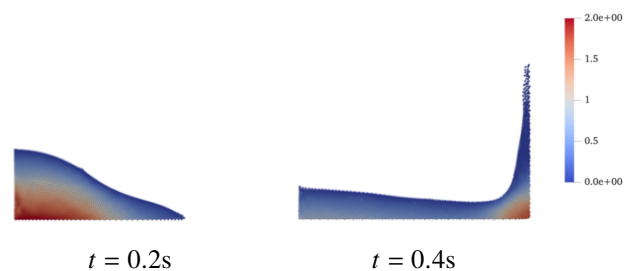


Fig. 1 fluid surface profile and pressure distribution

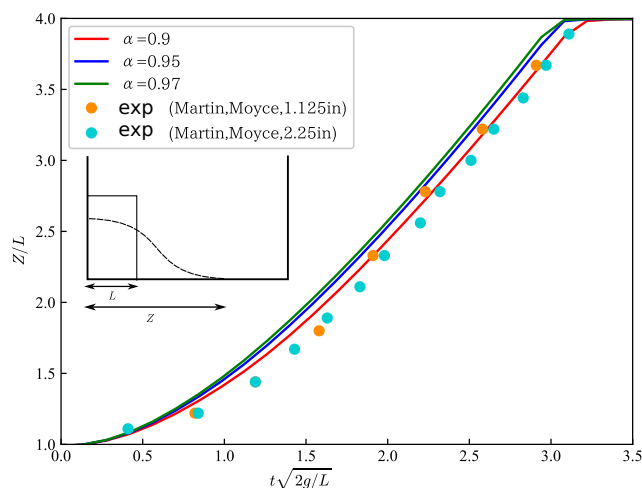


Fig. 2 the distance of the wave front from the gate

4. 結論

本研究では、uniform GIMP を用いた流体解析手法の開発を行った。本研究の定式化では、自由表面の特別な処理を必要としないという利点を有している。また、数値解析の結果よりクラスタリングを抑制できていることを確認した。今後は、地盤と流体の連成問題を考え、浸透流解析に発展させる予定である。

参考文献

- 1) D. Sulsky, Z. Chen, H. L. Schreyer: A particle method for history-dependent materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.118, pp.179–196, 1994
- 2) S. G. Bardenhagen and E. M. Kober: The generalized interpolation material point method, Computer Modeling in Engineering and Sciences, Vol.5, No.6, pp.477–496, 2004
- 3) R. Bridson: Fluid simulation for computer graphics, AK Peters/CRC Press, 2015
- 4) J. C. Martin, W. J. Moyce, J. C. Martin, W. J. Moyce, William George Penney, A. T. Price and C. K. Thornhill: Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol.244, No.882, pp.312–324, 1952