

座標回転系の方程式を写像計算する Locking-free 有限要素法 (シンポジウム講演概要)

Locking-free Finite Element Method for Calculating Map-represented Equations in Rotated Coordinates

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

今村 純也 (imi 計算工学研究室)
Junya IMAMURA, imi Computational Engineering Laboratory
E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp

This presentation proposes a scheme to ease and avoid so-called numerical locking. Two sources cause the locking. One is to apply an incomplete n^{th} order function, and another is to neglect Cauchy-Riemann equations. A textbook example of the former exists in the 45° -rotated case of the square element represented by the bi-linear function. An example of the latter is neglecting the equation for lateral components, which is equal to neglecting the equation for the transverse component in 45° -rotate coordinates. The proposed scheme enables the calculation in arbitrary rotated coordinates of hexahedral elements by the virtual work method.

1. 目的と背景

(1) 目的

Locking-free 有限要素法を提唱している。有限要素は完全 n 次関数で表すべし、とするものである。

四面体要素は座標回転に関係なく完全 n 次式で表せるので、数値 Locking に強いが、格子形成プロセスの負荷は大きい。

対して、六面体要素は直交メッシュで写像計算するので、自動化し易い。

本稿モデルでは後者のメリットを採り、不完全 n 次関数による数値 Locking への弱さを、座標回転系表示の方程式とし、写像計算して行くことで回避する。

数値 Locking は Cauchy-Riemann の関係式を満たさないことでも起る。それには、共役変数の概念で満たして行く技法を適用する。

(2) デカルト座標系方程式解法のボトルネック

従来の座標非回転表示の方程式解法の隘路に関する。

数値 Locking の典型例は、正方形を 45° 回転した、菱形要素の計算で表れる。

流れ場の計算などでは、双 1 次関数の係数項を差分形の補間式で表す。

かつ、連立方程式を SOR 法で解くのが一般であり、人によっては、連立方程式を解かない方法である、と説明する。

したがって差分形の補間式は、数値を代入して計算することのみに使い、パラメータで表すのは、SOR 法で緩和する当該ノードのみである。

“力学の問題は簡単である、連立方程式を解く問題である”と、その難しさを逆説的に説く人も居る。(独の工学雑誌。)

SOR 法は連立方程式解法のひとつであり、連立方程式(係数行列)を組めなければ、SOR 法でも解けない筈である。

したがって、何らかの数値誤差に頼って計算を進めている筈である。数値 Locking の逆の効果に頼っている、と言えよう。

連立方程式を組むには、ノードパラメータも、方程式も、 45° の座標回転系で表して解いて行く他ない。

それを任意形の六面体でも実行するには、ノードごとにそれぞれの座標回転角でパラメータを表し、写像要素でそれを補間し、写像要素の Gauss 数値積分点で、座標回転した仮想仕事式を積分して行く他ない。

仮想仕事法はスカラーの仕事量(運動エネルギー)を計算する方法であることに負う。

仮想仕事変分式に変分パラメータの解を乗じれば、系全体のスカラー量の平衡を得る方法、であることは容易に解る。

(3) 離散 Helmholtz 分解法

本稿は、“Helmholtz 分解に基づく連続体理論の、有限要素法への適用に関する研究”の一環である。

Helmholtz 分解($H-d$)を修正し、離散 Helmholtz 分解(dHd)法を提示している。

($A+B$)と($A-B$)の2つの変数を、互いに共役(軀)変数と呼ぶ。Cauchy-Riemann の関係式は、一方の計算には共役変数を最小化することを要求する、と解釈する。

一般の、最小化なしの解法は、高次項の誤差を無視する解法のみに頼っている。

dHd 法は、 $\nabla \mathbf{u}$ を $\{\gamma, \omega\}$ で ($A+B$)と($A-B$)に和分解表示する他、対角項も $\{\alpha, \beta\}$ に和分解して、いずれにも分解方程式を充てて解いて行く。桁落ち e : ($A+e$)+($B-e$)式を($A+e$)-($B-e$)でも解く。よって桁落ちを最小化 $< 2e \Rightarrow 0$ する Locking-free 法である。

3D の 2D 化モデルの変数は $\{u, v\}$ のみではなく、 z 方向には剛体の $\{u, v, w^{\#}\}$ ($\partial w^{\#} / \partial z = 0$) である、ことに基づく。

2. 座標回転系の写像計算法

(1) 菱形要素

ノード k の値を $\{\varphi\}_k$ とし、 $\{\varphi\}_k$ のベクトルを双 1 次要素で、行列 $[\mathbf{H}]$ を介して表し、 $[\mathbf{H}]$ の逆行列が計算できれば、ノードパラメータで双 1 次の係数ベクトルは表せる。

菱形は、 $[\mathbf{H}]$ の逆行列式がゼロとなり、計算できない。

それを、一般に使われる式(公式)で、次に説明して置く。

本稿では任意形の六面体を、Fig. 1 のように左回りにノード番号を振る。

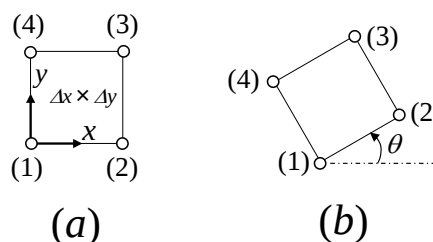


Fig.1 node number for bi-linear element

写像座標を ξ, η とする. (i.e.; $\Delta\xi = 1, \Delta\eta = 1$)

以下, ノードに関するデータにはノード番号を添え字する.

式(1)で双1次式を表せば, 係数ベクトル $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ には, 公式では, 式(2)の係数式の項が, それぞれ対応する.

$$\varphi(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy \quad (1)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta x}x + \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{\Delta y}y + \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{\Delta x \Delta y}xy \quad (2)$$

($\Delta x = 1, \Delta y = 1$) のケースでも, 論理は例外ではない.

クロネッカーの δ_{ij} を乗じる式形 ($\delta_{ij}\varphi_{ij}$) で, 式(2)を整理して, パラメータ表示すれば式(3)となる.

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(1 - x_1 - y_1 + x_1y_1) + \varphi_2(1 - x_2y_2) + \varphi_3x_3y_3 + \varphi_4(y_4 - x_4y_4) \quad (3)$$

ノード ($k=1$) の周りに 45° 回転した菱形の $+ \varphi_3x_3y_3$ 項は $x_3 = 0$ なので, パラメータ表示できない.

つまり, 基底関数としての式(1)は, 特異点を有す. 不完全 n 次関数なので Locking を内蔵し, Locking-free 要素ではない.

(2) 座標回転角

ノードごとにそれぞれの座標回転角でパラメータを表すとは, 写像要素の, ノードの座標回転角を (θ 菱形),

ノード(1) は, 辺 (1)―(2) の変化角度 ($\theta_1=45^\circ$),

ノード(2) は, 辺 (2)―(3) の変化角度 ($\theta_2=45^\circ$),

ノード(3) は, 辺 (3)―(4) の変化角度 ($\theta_3=45^\circ$),

ノード(4) は, 辺 (4)―(1) の変化角度 ($\theta_4=45^\circ$),

の要領でパラメータ表示する.

要するに, Gauss 積分点でのノードパラメータ表示が, デカルト座標系では菱形が特異点となるが, 回転座標系 (菱形を正方形に) なら可能. 亜菱形 (ほぼ菱形) も, 例外なく安定計算可能となる.

この方法は, 正方形要素の 45° 回転座標系の方程式計算にも適用できる.

(3) 適用例: Cauchy-Riemann の縦成分式

Cauchy-Riemann の縦成分式 (2D の *divu* の共役変数をゼロとする式) への, 適用法の例で示す.

共役変数式 (法線ひずみの差の式) は 45° 回転 (s, y) 座標系のせんひずみ式 ($\times 2$) に等しいので, $2\gamma_{sn}$ を最小化することで, 数値的に満たして行く.

(4) 写像計算法: 単位セル法 (UCM)

写像要素を, 著者は単位セル (UC) と呼び, 写像計算法を単位セル法 (UCM) と呼んでいる.

UC 要素の頂点ノード値を, 六面体頂点ノードの x_i 値として有限要素表示し, UC 要素内 x_i を六面体の独立変数とする概念で捉えるものである.

この概念では, Locking-free 要素法の高次化が可能である.

3. その他の Locking-free 有限要素法

(1) サブ・パラメトリック要素法

既報では, 双1次形状要素に対して, 変位関数が完全2次関数となるよう項を加えた. 加えた項は要素内で, 分布荷重と相殺するよう消去する.

はりでは, 等分布荷重に対して4次の項を, 三角形分布荷

重に対しては5次の項を加え, 係数項をパラメータとして, 荷重値ゼロを含めて, 最小2乗計算する.

(2) スーパー・パラメトリック要素法

最も簡単な Locking-free 法である.

双1次の式(1)の要素の例では, 要素内一定パラメータの要素 γ_{xy} を加え, C_4xy 項を γ_{xy} の自由度で最小化することで, 数値的にスーパー・パラメトリック法を適用する. (高次要素にも, 適用可能.)

すなわち, ノードパラメータ表示した C_4xy 項を, γ_{xy} で最小2乗化し, γ_{xy} 分をノード k のパラメータ増分 ($\Delta\varphi_i \equiv \{\Delta\varphi\}_k$) で相殺 (offset) して行く.

Cauchy-Riemann の縦成分式も同様にして, $2\gamma_{sn}$ 分を座標回転モデルで計算し, offset して行く.

上述スキームは, 横成分式に関しても同様に適用できる.

4. 数値計算例

(1) 問題設定

最も簡単な Locking-free 問題の数値計算例として, 菱形要素の片持ちばりを採り挙げる.

かつ形状が終始, 菱形で変わらない微小変形問題として解く. メッシュを Fig.2 に示す.

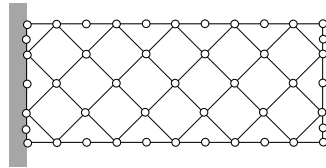


Fig.2 cantilever for numerical verification

三角形部分にも四辺形要素を適用する. それにより, 方法の柔軟性を検証する.

せん断変形も加える. それによる Locking の発生が, 剛体回転問題の1D版である. (Timoshenko ばりの Locking 問題.)

すなわち, 2D の1D化モデルは, y 方向には剛体の $\{u, v\}$ ($\partial v^\# / \partial y = 0$) である

(2) 発展形

崩壊形など, 大変形問題は “粒子-メッシュ法” によるので, 亜菱形状態は避けられない. それを安定計算可能とする.

5. 考察と今後の課題

数値 Locking の原因は, 不完全 n 次式の適用と, Cauchy-Riemann の関係式を無視する, ことの2点に在るとした.

それを Locking-free とするため, 座標回転系の仮想仕事計算法を提示した.

今後の課題は, 既存のシステムへの組み込み, へのアピール方法に在り, 現在の課題は, 著者の高齢化に在る.

参考文献

- 1) 今村純也: 数値流体力学シンポジウム CFD36 論文集, 講演番号 C08-1, 2022.