

空間 2 次精度を有する I-SPH(2)による自由表面非圧縮流れ解析 (シンポジウム講演概要) Incompressible Free surface flow analysis using I-SPH(2) with spatial second-order accuracy (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

白神 嘉也 (九州大・工) 藤岡 秀二郎 (九州大・工) 浅井 光輝 (九州大・工)
Yoshiya SHIRAKAMI, Kyushu University
Shujiro FUJIOKA, Kyushu University
Mitsuteru ASAI, Kyushu University
E-mail: y-shirakami@doc.kyushu-u.ac.jp

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian particle method that is well suited for splitting and coalescing of fluids, but it still has fatal errors that degrade due to particle turbulence during simulation. Therefore, a higher order spatial derivative formulation of SPH that satisfies the second -order accuracy of the Taylor expansion has been developed by our research group. Free-surface flows, in which the particle array is easily disrupted by violent water surface changes and particles within the radius of influence are inevitably lost near the water surface, were expected to be an example of application of a highly accurate model, but numerical instability remains a problem. In this study, we reviewed the entire calculation scheme of the particle method except for the derivative operator and proposed an improved treatment that includes free surface determination. Finally, the proposed method is demonstrated through rotating square and dam failure analyses to show the accuracy and robustness.

1. 緒言

Lagrange 記述に基づく粒子法の一つである SPH 法は、計算過程において物理的な速度によって粒子を動かすため粒子分布が非均一となり、計算精度が低下しやすい。そこで、乱れが生じても Taylor 展開の 2 次の項までを満たす高精度な 2 階微分モデル¹⁾ (以下、SPH(2)と略記) が提案された。ただし、自由表面流れ問題では、激しい形状変化により粒子配置が乱れやすく、また表面付近では影響半径内の粒子が必然的に欠損するため、高精度モデルのよい適用例として期待していたが、自由表面付近で計算が不安定になる問題が残されていた。そこで本研究では、高精度 SPH 法による自由表面流れ解析の計算安定化を目的とし、自由表面判定を含む微分演算子以外の計算スキーム等を全体的に見直した I-SPH(2)を提案する。

2. 高精度微分モデル

SPH(2)は、これまでに SPH 法の枠組みで提案されてきた高精度微分モデルを修正改良した勾配モデルと、空間の 2 階微分項に対する高精度モデルから構成される。両者ともに、理論的には空間 2 次精度を満たすモデルである。ただし、現実的には粒子配置の空間の乱れにより、収束性を悪化させる傾向が避けられず、運用上は粒子再配置法と併用化することが望ましい。以下、2 次精度の勾配モデルおよび、空間 2 階微分モデルを整理して示す。

2.1. 修正勾配モデルと SPH(2)の勾配モデルの比較

修正勾配モデルは、SPH 近似と Taylor 展開から導出されており、通常の勾配モデルに勾配修正行列を作用することで高精度化している。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &:= L_i^{-1} \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j (\phi_{ij} - R) \nabla w_{ij} \\ &\equiv \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} L_i^{-1} \nabla w_{ij} =: \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \\ L_i &:= \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \end{aligned} \quad (1)$$

V_j は j 粒子の代表体積、 ϕ_i は i 粒子の物理量 ($\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$)、 w_{ij} は j 粒子の i 粒子に対する重み、 $\mathbf{r}_i$ は i 粒子の位置ベクトル ($\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$) を示す。 R は Taylor 展開の剰余項であり、

ここでは 2 次以上の高次項となる。上記の修正勾配モデルは 2 次以上の項を無視した 1 次精度のモデルであり、 R に次節で与える空間 2 階微分項を代入したモデルが SPH(2)の勾配モデルとなる。

2.2. SPH(2)モデルによる空間 2 階微分

2 次元問題における高精度 2 階微分モデルは、次式に示す 3×3 の行列を各 2 階微分項に対して数値的に解くことで評価できるモデルである。

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathbb{S}_i} \frac{m_j \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{\rho_j |\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{p}_{ij}^T \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right]^T \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{S}_i} \frac{m_j \mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{\rho_j |\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} \left\{ \phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{S}_i} \frac{m_k}{\rho_k} \phi_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{q}_{ij}$ と $\mathbf{p}_{ij}$ は次の式で定義される。

$$\mathbf{q}_{ij} := [x_{ij}^2 \ y_{ij}^2 \ x_{ij} y_{ij}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_{ij} := [A(x, x) \ A(y, y) \ A(x, y)]^T \quad (4)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \sum_k V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (5)$$

3. 正方形パッチテスト (解析的に微分可能な関数による数値微分モデルの検証)

3.1. 概要

Fig.1 に示す微分可能な連続関数について、理論値と粒子による離散微分値との比較検証を通して、高精度微分モデルの有用性を示す。ここでは、ラプラシアンについて高精度モデルと標準モデルを比較検証した。

検証は以下の手順で行い、誤差評価関数は外れ値の影響を大きく評価する RMSE とした。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_i (\langle \nabla^2 \phi \rangle_i - \nabla^2 \phi_i)^2}{\sum_i (\nabla^2 \phi_i)^2}} \quad (6)$$

1. 粒子を配置し、関数の情報を与える。
2. 影響域に粒子欠損のない内部粒子についてラプラシアンとその誤差を評価する。
3. 外部境界周辺の影響域に粒子欠損がある粒子についてラプラシアンとその誤差を評価する。
4. 粒径を小さくし、1~3 の操作を繰り返す。

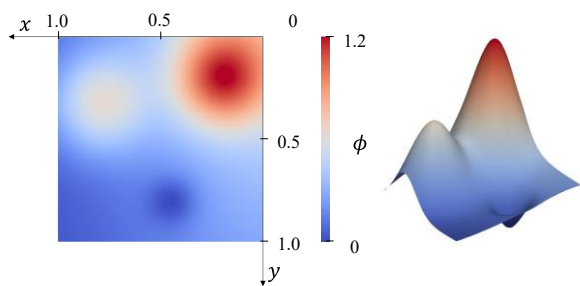
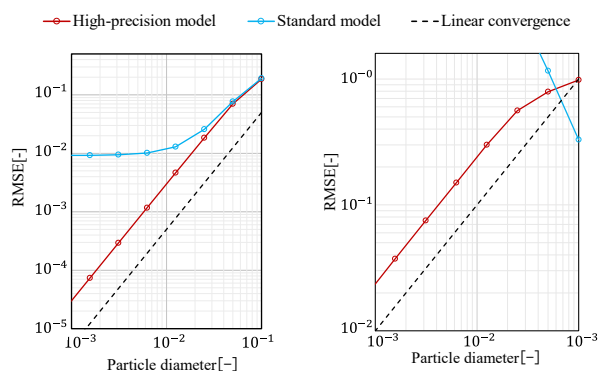


Fig.1 Test function

3.2. 精度検証結果

検証結果を Fig.2 に示す. 標準的なラプラシアンモデルでは, 粒子欠損のない内部粒子においても粒子直径の減少に伴う収束性が見られず, 外部粒子においては誤差が増大した. 一方, 高精度モデルでは粒子欠損がみられる際にも粒子直径の減少による 1 次収束を確認した.



(a) inner particle

(b) outer particle

Fig.2 RMSE of Laplacian

4. 自由表面流れ解析

4.1 高精度 SPH モデルによる解析に向けた改良

自由表面の判定漏れを防ぐために, 固有値による判定法²⁾に対して修正勾配の特性に基づく改良を行った.

4.2 正方流体回転解析

解析モデルは 1 辺が 100cm の正方形領域の無粘性流体であり, 初期条件として正方形領域の図心を中心に角速度 1.0 rad/sec を与えた. 粒子直径は 0.5cm, また時間増分は 1.0×10^{-4} sec とした. また, この例題のみ XSPH 法³⁾を導入することで計算安定化を図った.

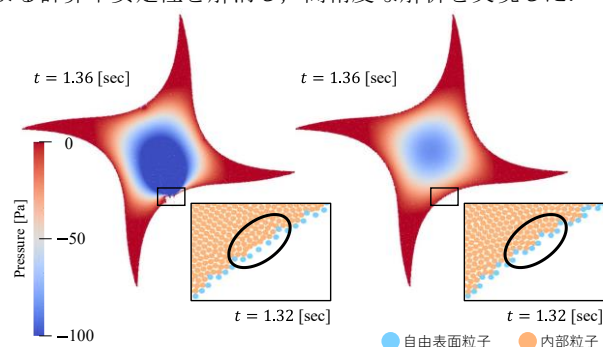
解析結果を Fig.3 に示す. Fig.3 (a)の改良なしでは, 自由表面の判定漏れから計算不安定性が引き起こされ, 図示した時刻 $t = 1.32$ sec の次の時間ステップで計算が破綻した. 一方, Fig.3. (b)に示す改良法においては自由表面の判定漏れが減少したことで計算安定性を得て, 長時間の解析を行うことができた.

4.3 水柱崩壊解析

解析モデルは, 100cm $\times$ 300cm の水槽と 40cm $\times$ 40 cm の水柱からなり, 粒子直径は 0.5cm, 時間増分は 5.0×10^{-4} sec とした.

解析結果を Fig.4 に示す. 高精度微分モデルのみを導入した場合, 自由表面の誤判定に伴い計算破綻が生じた. 一方で, 提案した改良法により, 波が発生して粒子同士が激しく衝突するような場合においても, 高精度微分モデルに

よる計算不安定性を解消し, 高精度な解析を実現した.



(a) without modification

(b) with modification

Fig.3 Snapshot of rotating square

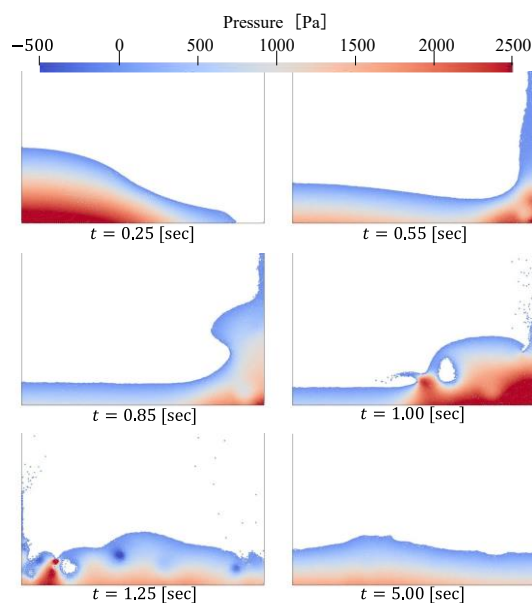


Fig.4 Water column collapse behavior

5. 結言

本研究では, 空間 2 次精度を有する微分モデルである SPH(2)を自由表面・非圧縮性流体解析に適用するために, 自由表面の判定に改良を施した I-SPH(2)を提案した. 高精度微分モデルのみを導入した際には, 自由表面の誤判定に伴う圧力振動が計算不安定性の要因であることを究明し, その改良へとつながった. 基本的な例題を通して, I-SPH(2)により高精度かつロバストな解析を実行できることを示した. 今後は, 高精度微分モデルの定量的な検証を行う予定である.

参考文献

- 1) 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝, 高精度 SPH 法 ～空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol. 79, No.15, 2023.
- 2) S. Marrone, A. Colagrossi, D. Touzé, and G. Graziani, Fast free-surface detection and level-set function definition in sph solvers, *J. Comput. Phys.*, Vol.229, No.10, pp.3652–3663, 2010.
- 3) J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol.30, No.1, pp.543–574, 1992.