

非圧縮粘性流体のための安定化陰的 MPM (シンポジウム講演概要)

Stabilized Implicit MPM for Incompressible Viscous Fluids

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

三原 康平 (広島大・工) 川野 慎之介 (広島大・先) 橋本涼太 (広島大・先)

Kohei MIHARA, Hiroshima University
Shinnosuke KAWANO, Hiroshima University
Ryota HASHIMOTO, Hiroshima University
E-mail: ryotahashimoto@hiroshima-u.ac.jp

This study proposes a stabilized implicit Material Point Method (MPM) for incompressible viscous fluids. The weak forms of the equation of motion and continuity equation were coupled and discretized by MPM in space and Newmark's β method was used in the time domain. Additionally, stabilization methods were introduced to avoid pressure oscillations and unphysical volume shrinkage. The dambreak flow analysis was conducted to validate the developed method including the effectiveness of the stabilizations and implicit scheme.

1. 背景と目的

令和元年台風 19 号で決壊した千曲川の堤防をはじめ、豪雨時に越水による川裏法面の侵食・破堤が頻発し、「粘り強い河川堤防」の開発と適用が進められている。対策工の性能を評価するには、堤防への水の浸透・越流から盛土の変形や破壊に至る一連の現象を表現できる解析手法が有用となる。堤防の越水侵食の解析手法として土と間隙流体の多相連成系で定式化された Material Point Method (MPM)¹⁾が開発されているが、固相と流体相ともに陽解法を採用しており、時間増分の大きさの制約により実時間スケールでの浸透～越水プロセスの解析には難がある。そこで、堤防周辺の水の自由表面流れと浸透流の統一解析を最終的な目的とし、本研究ではまず、非圧縮粘性流体のための陰解法に基づく MPM をその安定化手法と合わせて提案する。

2. MPM と開発手法の概要

MPM²⁾は格子と粒子を併用した連続体の解析手法である。物体を粒子に分割し、質量等の物理量を背後に設けた有限要素メッシュの節点に投影して支配方程式の弱形式を解き、得られた運動学的変数を粒子に補間して移動させる。メッシュを時間ステップごとにリセットするため、要素のつぶれによる計算の破綻を生じることなく、盛土の崩壊や流体の自由表面流れのような連続体の大変形を扱える。しかし、既存の非圧縮性流体に関する MPM は、弱圧縮性を仮定した陽解法や、運動方程式と連続式を分離する半陰解法によるものであり、前者は CFL 条件による時間増分の制約があり、後者は圧力のポアソン方程式の境界条件を与えるための自由表面粒子の探索が必要となる。

そこで本研究では、時間増分の制約の小さい陰解法を用いて、運動方程式と連続式を同時に解く一体型解法を採用し、非圧縮性流体のための完全に陰的な MPM を開発した。支配方程式であるラグランジュ表示の運動方程式と連続式それぞれの弱形式を MPM で節点に空間離散化し、陰解法である Newmark の β 法で加速度と速度項を時間離散化する。その上で、変位と圧力を未知数として両式を連立して解く。ただし、この定式化では、有限要素法による非圧縮性流体解析と同様に係数行列が特異となり圧力振動が起こるため、Pressure Stabilizing Petrov Galerkin (PSPG) 法³⁾による安定化項を追加した。その結果得られる連立一次方程式は次式である。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] & -[K_v] \\ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [K_v]^T + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [K_v^{stab}] & [K_p^{stab}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u_{nd}\} \\ \{p_{w,nd}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 β と γ は Newmark の β 法のパラメータ、 $[M]$ は質量トリックス、 $[C]$ は粘性マトリックス、 $[K_v]$ は変位と圧力の連成マトリックス、 $[K_v^{stab}]$ と $[K_p^{stab}]$ は PSPG 法による安定化マトリックス、 $\{F\}$ と $\{F_p\}$ はそれぞれ運動方程式と連続式の残差ベクトルである。本定式化では流体表面のトラクションフリー条件が自動的に満足され、半陰解法に必要な表面粒子探索が不要となる。

続いて、体積保存性に関する安定化処理について述べる。MPM では粒子の重なりを許容しており、一度重なった流体粒子は節点から補間される運動学的変数が一致するため、その後同じ運動を示す。そのため、連続式で非圧縮性条件を課しているにも関わらず見かけ上体積圧縮が生じる。本研究ではこの粒子配置の空間的な偏りを解消するため、Asai⁴⁾の安定化 ISPH 法を参考にした安定化処理を提案する。まず、SPH 法における物理量の平滑化処理を参考に、MPM のメッシュの節点 i において平滑化された流体密度 $\tilde{\rho}_i$ を次式で評価する。

$$\tilde{\rho}_i = \sum_p W_i(\mathbf{x}_p) M_p = \sum_p \frac{N_i(\mathbf{x}_p)}{\int N_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} M_p \quad (2)$$

ここに、 $W_i(\mathbf{x})$ は節点 i の形状関数 $N_i(\mathbf{x})$ をその空間積分値で割った重み関数であり、SPH 法のカーネル関数と同様ユニティ条件を満たす。 $\mathbf{x}_p$ と M_p は粒子 p の座標と質量である。そして、粒子配置が本来の流体密度 ρ に近づくよう連続式を補正した。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\alpha \rho - \tilde{\rho}}{\rho \Delta t} \quad (3)$$

ここに α は 0 から 1 の値をとる安定化パラメータである。

以下では二次元正方格子で形状関数に二次 B-spline 基底関数、粒子－格子間の変数の投影・補間に FLIP 法を用いた。

3. 開発手法の妥当性の検証

開発した安定化陰的 MPM の妥当性を検証するため水柱のダムブレイク流れ解析 (Fig. 1) を行った。584 mm 四方の領域を 40×40 要素に分割し、左下の 146×292 mm の範囲に 1 要素あたり 4 個の粒子を配置し、自重のみを与えた。

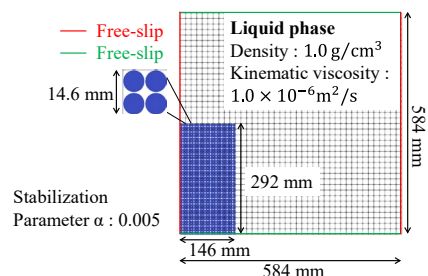
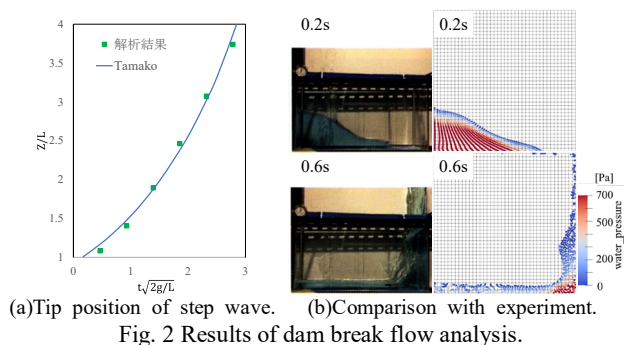


Fig. 1 Analytical model for dambreak flow.



時間増分を 1.0×10^{-3} s とし、40,000 ステップ計算した。

Fig.2(a)に段波発生後 0.24 s までの段波の先端位置の時刻歴の既往研究との比較を示す。若干のずれはあるものの概ね妥当な結果が得られた。また、0.2 s 時点で水柱が崩れ底面を右方向に流れ始め、0.6 s 時点では水が壁に沿って落下し始める様子は概ね実験結果画像と同様の結果となった。

4. 安定化の効果の検証

開発手法における PSPG 法による水圧の安定化と体積の保存性に関する安定化の効果の前章と同じダムブレイク流れ解析 (Fig. 1) を通じて検証した。

Fig. 3(a)に示すように水圧の安定化前は圧力振動が起これ、また解析開始から 0.175 s で発散し最後まで計算を行うことができなかった。これは本手法で計算する連立一次方程式の係数行列の連続式に関する行の対角項がゼロになり特異となることに起因する。ここに式(1)に示すように PSPG 法による安定化項を追加することでスムーズな水圧分布を示し (Fig. 3(b))、安定して解析を実行できた。

Fig. 4 に体積の保存性に関する安定化の導入前後の 40 s 時点での解析結果を示す。Fig. 1 に示すように解析開始の時点では 200 (縦 20×横 10) 要素分あった体積が、安定化前 (Fig.4(a)) では一つの要素内に初期の粒子数 (4 個) よりも多く粒子が入り、およそ半分まで体積が減少した。一方で安定化後 (Fig.4(b)) は粒子がおおよそ 200 (縦 5×横 40) 要素に分布し体積が保存されたことが確認できた。

5. 陽解法との比較

最後にダムブレイク流れ解析を陽解法(前進オイラー法, Modified Update Stress Last スキーム)²⁾に基づく MPM による解析結果を示し、今回開発した陰解法の有効性を確認する。陽解法では、圧力を未知数とせず、水を弱圧縮性 Newton 流体と仮定して体積弾性係数を 2.0 GPa とした。

時間増分を 1.0×10^{-3} s, 1.0×10^{-4} s 及び 1.0×10^{-5} s としたときは計算途中で発散し結果が得られなかったため、 1.0×10^{-6} s による解析結果を Fig.5 に示す。陽解法を用いると隣接する粒子間でも圧力分布が連続せず負圧が生じているものもありうまく計算できない。また 1.0×10^{-6} s という時間増分ではまだ十分に小さくなく、水面形が乱れ不必要に飛散する粒子がある。今回のダムブレイク流れ解析においては、解析結果を得るために陰解法と比較して時間増分を 1/1000 以下にする必要があることが分かった。陽解法は連立一次方程式を解く必要がなく 1 ステップ当たりの計算時間は短い、本研究が対象とするような数時間スケールの解析を行う場合には陰解法が効果的と言える。最後に参考までに、この節で行った陽解法 MPM による解析と陰解法による解析を 2s 分行った解析時間を示す。陽解法:4547s, 陰解法:324s。

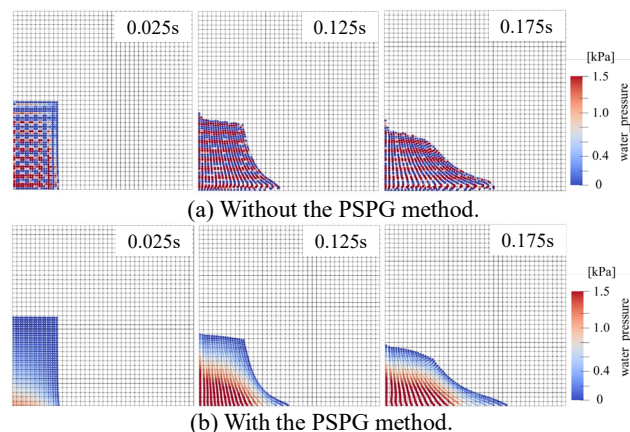


Fig. 3 Pressure distribution without and with the PSPG method.

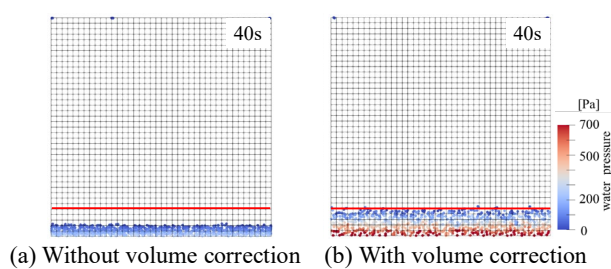


Fig. 4 Particle configuration after 40 seconds.

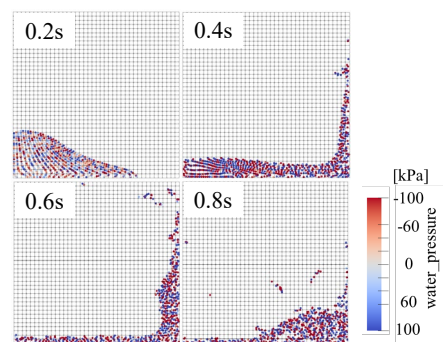


Fig. 5 Results with the explicit (MUSL) scheme.

6. まとめ

非圧縮粘性流体のための陰解法に基づく安定化 MPM を開発し、自由表面流れ解析の妥当性を検証するためダムブレイク流れ解析を行った。その後本手法における安定化処理の効果を確認し、最後に陽解法と比較した陰解法の有効性を確認した。今後、固相との相互作用を考慮した土-水連成解析への拡張を進める。

参考文献

- 1) Liang *et al.*: Simulation of overtopping and seepage induced dike failure using two-point MPM, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 118, pp. 179-196, 1994.
- 2) Sulsky *et al.*: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *J. Comput. Phys.*, Vol. 87, pp. 236-252, 1995.
- 3) Tezduyar, T. E. *et al.*: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, pp. 221-242, 1992.
- 4) Asai, M. *et al.*: A stabilized incompressible sph method by relaxing the density invariance condition, *J. Appl. Math.*, Vol. 2012, Article ID 139583, 2012.