

自由表面流れ解析に対する IGA の適用 (シンポジウム講演概要)

Application of IGA for free surface flow analysis (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

尾崎 壮一 (八戸工大・工) 高瀬 慎介 (八戸工大・工) 田中 聖三 (広島工大・工)

Soichi OZAKI, Hachinohe Institute of Technology
Shinsuke TAKASE, Hachinohe Institute of Technology
Seizo TANAKA, Hiroshima Institute of Technology
E-mail: takase@hi-tech.ac.jp

This paper presents an application of Isogeometric analysis(IGA) for free surface flow analysis. In this method, the free surface shape is expressed as a domain boundary with IGA technique based on the B-Spline function. As for the moving boundary method, ALE method based on interface tracking approach is used. For the fundamental research, several numerical examples are presented to demonstrate for the proposed free surface flow analysis using IGA.

1. はじめに

自由表面流れは、土木工学分野において数多く存在し、橋梁や堰などの河川構造物、防潮堤などの海洋構造物周辺の流れ、スロッシングと呼ばれる加振される容器内の液体振動などが挙げられる。このような工学的問題で重要なことは、これらの流体挙動が構造物に及ぼす影響を外力としてその構造物の設計に反映させることであり、そのためには自由表面流れの流況を正確に把握し、評価する必要がある。また、構造物に作用する流体力を正確に評価するためには、構造物を正確にモデル化し、局所的な流況を把握する必要があるため、自由表面を考慮した非圧縮粘性流体解析が必要となる。

近年、T.J.R. Hughes らによって開発された Isogeometric 解析 (IGA) 法^{1),2)} が構造解析の分野において、注目されている。IGA では、汎用の CAD ソフトウェアでサーフェースの描画に用いられている B-Spline 関数を FEM の基底関数に直接利用するため、形状表現の誤差を気にすることなく、また、メッシュ生成の手間をかけずにシミュレーションが可能となっている。

そこで本研究では、IGA を用いた自由表面流れ解析手法の構築を目的とする。具体的には、構造物など解析対象を CAD の形状表現に用いられる Spline 関数を有限要素解析の基底関数に採用することで、CAD で描かれた形状が近似誤差が少なく解析可能となる IGA に着目し、自由表面流れ解析を行う。また、Spline 関数は高次の基底関数を容易に導入できることから界面追跡法の 1 つである ALE 法^{3),4)} を用いて自由表面形状を直接的に解析をすることで、界面形状の精度向上も期待できる。本論文では、数値解析例を通して、本手法の有効性について検討を行う。

2. 解析手法

2.1. 支配方程式

本研究で用いる支配方程式は、非圧縮粘性流体における Navier-Stokes の運動方程式と連続式で以下のように表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 $\bar{\mathbf{u}}$ は相対速度であり、空間における流速と観測者の移動速度（節点移動速度）

$\hat{\mathbf{u}}$ の相対的な速度である。 p は圧力、 $\mathbf{f}$ は物体力ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである。また、Newton 流体を仮定し、構成則には次式を用いる。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は 2 階の単位テンソル、 μ は粘性係数であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ は次式で定義される変形速度テンソルである。

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (4)$$

2.2. NURBS 基底関数

本研究では、NURBS 基底関数を用いて IGA の解析を行う。NURBS 曲線 $\mathbf{C}(\xi)$ は、実空間上に配置されるコントロールポイント座標値により構成される位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ と NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ の線形結合として、次式で表される。

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (5)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (6)$$

ここで、 $N_{i,p}(\xi)$ は B-Spline 関数、 w_i は形状を制御するためのコントロールポイントにおける重み、 p は基底関数の次数、 n はコントロールポイント数である。また、B-spline 関数 $N_{i,p}(\xi)$ は次式で表される再帰的な関数である。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (8)$$

ξ_i はノットと呼ばれるパラメータであり、曲線上の要素の境界を表す局所座標値である。

2.3. 安定化有限要素法による離散化

支配方程式 (1), (2) に対して、NURBS 基底関数を用いて SUGP/PSGP 法⁵⁾ に基づく安定化有限要素法を適用すると以下の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega^P} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega^P} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega + \int_{\Omega^P} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^P} \left\{ \tau_{supg} \bar{\mathbf{u}}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\
& \quad \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) \right\} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^P} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w}^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
& = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

第4項は移流の卓越に対する安定化を施す SUPG 項および圧力振動を回避するための安定化項である PSPG 項, 第5項は自由表面の数値不安定性を回避する安定化項である衝撃捕捉 (Shock-Capturing) 項⁶⁾である。ここで, $\mathbf{w}^h$, q^h は流速, 圧力の重み関数, τ_{supg} , τ_{pspg} , τ_{cont} は安定化パラメータである。

3. 矩形貯槽内スロッシング解析

本手法の大きく移動する自由表面問題での精度検証を行うため矩形貯槽内スロッシング解析を取り上げる。解析条件として, 幅 1.0[m], 高さ 1.0[m] の貯槽内に 50% 貯まった流体に式 (10) で表される水平加速度を与える。振幅 A は 0.0093m, 角速度 ω は 5.311rad/s である。

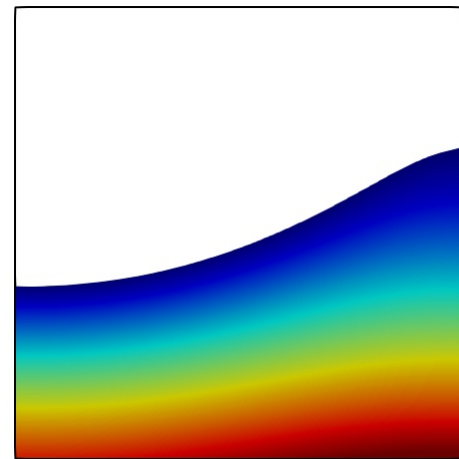
$$f_x = A\omega^2 \sin\omega t. \tag{10}$$

流体は水と仮定したため密度 ρ および動粘性係数 μ はそれぞれ, $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ を用いた。境界条件として壁面で slip 条件を与えた。時間増分量は $\Delta t = 0.001\text{s}$ を用いた。

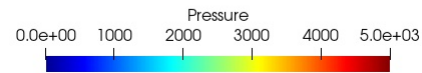
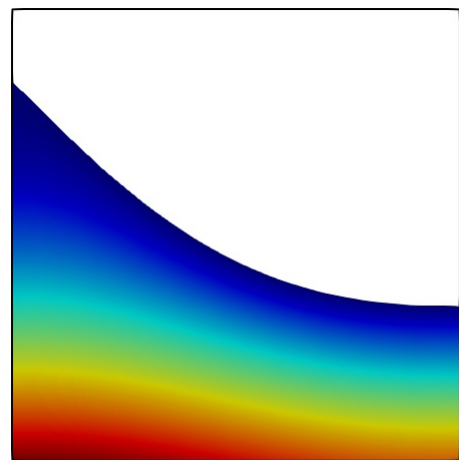
解析結果として, 図-1 に各時刻における水面形状を示す。この図より大きく自由表面位置を変化させながら, 安定に解析が行われていることがわかる。また, 図-2 に, 貯槽内左壁における水位の時刻歴の実験値との比較を示す。解析結果は実験値⁷⁾とも良い一致を示していることがわかる。このことより, 本手法で用いている自由表面解析手法の計算精度が確認できた。

参考文献

- 1) Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.4135-4195, 2005
- 2) Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, Chichester, U.K., 2009
- 3) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Zimmermann, T.K. : Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29, pp.329-349, 1981.
- 4) Huerta, A., Liu, W.K. : Viscous flow with large free surface motion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69, pp.277-324, 1988.
- 5) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991
- 6) Aliabadi, S., and Tezduyar, T.E.: Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces, *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.243-261, 2000.
- 7) Okamoto, T., Kawahara, M.: Two-dimensional sloshing analysis by the arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods, *Proceeding of JSCE*, 441, I-18, pp.39-48, 1992.



(a)



(b)

Fig.1 Analysis results at various times ((a):t=6.0s, (b):t=9.0s)

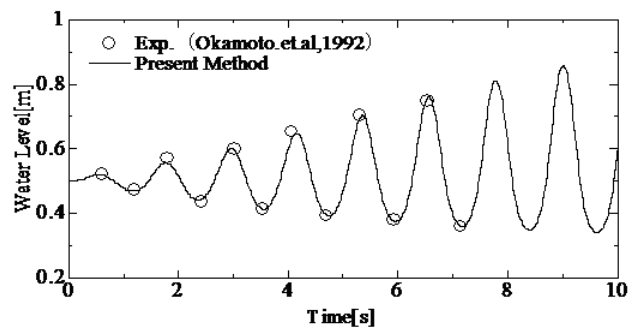


Fig. 2 Time history of water level at left wall