

QSI スキームと Multigrid 前処理圧力解法を用いた 3次元非圧縮性流体のスレッド並列計算 (シンポジウム講演概要)

Thread-Parallel Computations of 3D Incompressible Flow with QSI Scheme and Multigrid Preconditioned Pressure Solver (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

本西 亮太(京大院・工) 牛島 省(京大・ACCMS)
Ryota MOTONISHI, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Satoru USHIJIMA, ACCMS, Kyoto University
E-mail: motonishi.ryota.65z@st.kyoto-u.ac.jp

To obtain accurate numerical results of fluid flows, it is important to apply high-order schemes to the convection terms. While it was shown that QSI scheme is more accurate than 5th-order TVD, it is time-consuming due to its flux-control procedures. In this paper, QSI scheme is used for the incompressible 3D cavity flow in addition that the pressure Poisson equations are solved with Bi-CGSTAB method without preconditioner and with SOR or multigrid preconditioners. As a result of thread-parallel computations, it was shown that multigrid preconditioner is effective to decrease the total elapsed time even if QSI scheme is employed.

1. はじめに

非圧縮性流体の数値解析において、基礎方程式に現れる移流項を精度良く計算することは、妥当な計算結果を得る上で非常に重要となる。QSI (Quintic Spline Interpolation) スキームは、5次スプライン関数を利用した移流項計算手法であり、5次精度の TVD スキームよりも精度の高い結果が得られる¹⁾。その一方で、QSI スキームでは数値振動を防ぐために反復計算によるフラックス制御を行うため、他のスキームと比較して計算に時間を要する。

また、非圧縮性流体の計算手法である MAC 系解法²⁾においては、各時間ステップごとに離散化された圧力ポアソン方程式を解く必要があり、この計算も全体の計算時間の大部分を占める。既報³⁾では、2次元領域における流体計算において、圧力ポアソン方程式の求解にクリロフ部分空間法を用いる場合、前処理を適用することで計算時間が短縮されることが確認されている。

本研究では、高精度であるが計算負荷が高い移流項スキームを利用する場合に、3次元非圧縮性流体の圧力計算における Multigrid 前処理の効果を確認する検討を行う。すなわち、3次元キャビティ流れの移流項の計算に TVD および QSI スキームを利用し、圧力ポアソン方程式の求解に用いる Bi-CGSTAB 法に対して、前処理なし、SOR 法あるいは Multigrid 法による前処理を適用する、という3条件の計算を行い、計算時間を比較検討する。

2. 数値解析手法

密度 ρ 、粘性係数 μ が定数であり、外力が作用しない非圧縮性流体の基礎方程式は以下の通りである。 x_i は直交座標系の座標成分、 u_i は x_i 方向の流速、 p は圧力を表す。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

非圧縮性流体の計算方法として用いる MAC 系解法では、各時間ステップにおいて式 (2) 左辺第2項の移流項を計算する。本計算で利用する QSI スキームでは、5次スプライン関数を用いてセル中心速度をセル境界へ内挿して暫定的

な移流フラックスを求めたのち、数値振動を防ぐためにフラックスの制御を行う。制御には DC 法による反復計算あるいは FP 法によるポアソン方程式の求解が用いられるが、本研究では DC 法を用いた。今後は後者に Multigrid 前処理を用いることにより、計算を高速化できる余地がある。

次に、MAC 系解法では、次式で表される圧力ポアソン方程式を各時間ステップにおいて計算する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

本研究では上式を離散化して Bi-CGSTAB 法により近似解を求めた。Bi-CGSTAB 法には、前処理を用いることで反復回数が減少し、より高速に残差を減少させることができるという性質がある。前処理付き Bi-CGSTAB 法のアルゴリズムでは、前処理行列 M の逆行列とベクトルの積 $z = M^{-1}b$ を求める必要がある。本研究では SOR 法と Multigrid 法を用いてこの計算を近似した。

Multigrid 法は、格子点の粗さを変えて解を求めることにより定常反復法の長波長成分の収束を早める手法である。既報³⁾の変数補間を若干修正して、格子を粗くする制限補間は Fig. 1 において $\phi = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)/4$ によって求め、格子を細かくする延長補間においては $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ に ϕ を代入した。

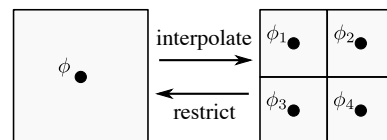


Fig. 1 Restriction and interpolation of multigrid method

3. 3次元キャビティ流れの計算による計算時間の比較

Fig. 2 に示すように、上部壁面に一定流速 U を与える3次元キャビティ流れの計算を行う。移流項の計算スキームに5次精度の TVD および QSI を用い、また圧力ポアソン方程式の解法として Bi-CGSTAB 法を選択した。Bi-CGSTAB 法については、前処理を用いない場合に加え、SOR 法、Multigrid 法を前処理に適用する場合について計算

を行った. 計算条件は $U = L = \rho = 1$, $\mu = 2.5 \times 10^{-3}$ とし, $Re = UL\rho/\mu = 400$ とした. 計算セル数は $128 \times 128 \times 128$ とし, プログラムは OpenMP によりスレッド並列化した. 計算には京都大学のスーパーコンピュータシステム (Intel Xeon 20cores 2.4GHz $\times$ 2/node) を利用した. 16 並列における圧力計算時間 T_p のスピードアップの値は, 前処理なしの場合で約 5.1, SOR 前処理の場合に約 10.8, Multigrid 前処理の場合に約 11.3 となった.

計算結果と既報⁴⁾ の流速分布の比較を Fig. 3 に示す. 妥当な計算結果が得られていることが確認できる.

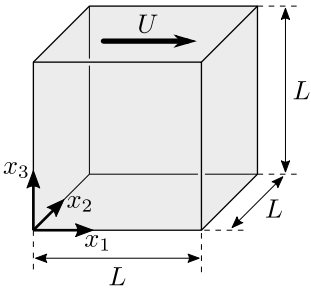


Fig. 2 3D cavity flow

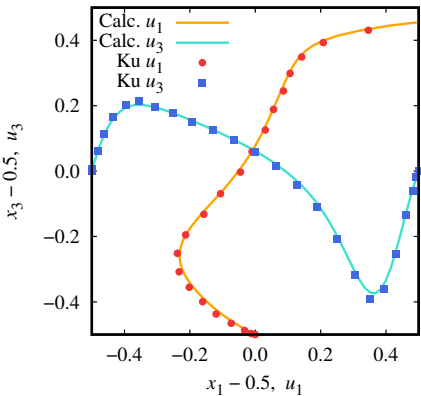


Fig. 3 Velocity distribution of cavity flow (u_1 at $x_1 = x_2 = 0.5$, u_3 at $x_2 = x_3 = 0.5$)

16 並列の場合の各解法における, 80,000 ステップまでの移流項計算時間 T_c , 圧力計算時間 T_p を Table 1 に示す. 移流項の計算において, QSI は TVD の 4~5 倍ほどの時間を要していることがわかる. 一方で, SOR 法や Multigrid 法による前処理はどちらの移流項計算スキームにおいても有効であることが読み取れる.

QSI スキームを用いて, 前処理なしの場合と, Multigrid 前処理を用いた場合の 2,000 ステップごとの計算時間の推移を表す結果を, それぞれ Fig. 4 と Fig. 5 に示す. いずれの場合においても移流項計算時間 T_c は定常解に向かう非定常計算の過程ではほぼ一定であるが, 圧力計算時間 T_p は定常解に近づくにつれて減少している. これは, 流れが定常状態に近づくにつれて, Bi-CGSTAB 法の反復回数が減少したためと考えられる. 特に, Fig. 4 と Fig. 5 を比較すると, 前処理なしの場合では流れの初期段階において圧力計算が計算時間の大部分を占めていることが確認できる一方で, Multigrid 前処理を用いた場合には初期段階においても圧力計算にかかる計算時間が抑えられている. QSI を利用することにより移流項の計算に時間を要しても, Multigrid 前処理により圧力ポアソン方程式を高速に解くことで, 全

Table 1 Comparison of T_p and T_c

Scheme		TVD	QSI
non-precond.	T_c [s]	2663.39	12120.19
	T_p [s]	9081.04	8201.90
SOR	T_p [s]	2470.49	2598.76
Multigrid		2155.14	1891.67

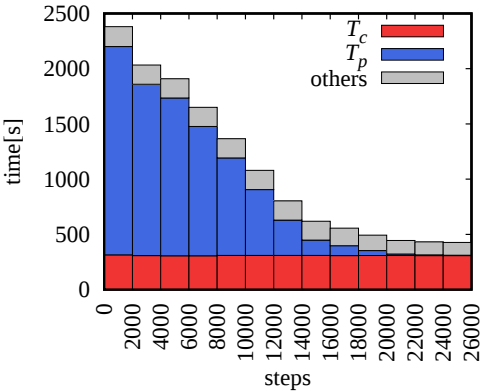


Fig. 4 Elapsed time per 2,000 steps (QSI, non-precond.)

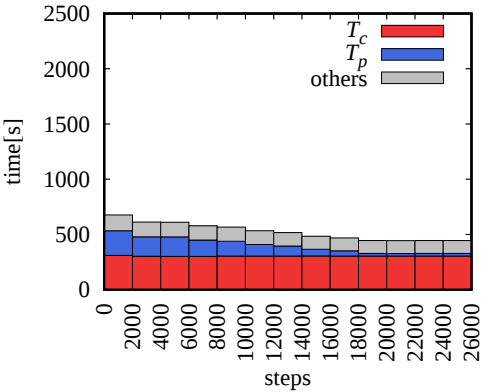


Fig. 5 Elapsed time per 2,000 steps (QSI, Multigrid)

体の計算時間を抑えられることが確認された.

今後の研究では, QSI スキームのフラックス制御において, FP 法に用いられるポアソン方程式へ前処理付き行列解法を適用することで移流項の計算時間の短縮を図り, 高精度かつ高速な流体計算法を構築する計画である.

参考文献

- 1) 牛島省, 吉田圭介, 竹村雅樹, 禰津家久: フラックス制御を利用する移流方程式の 5 次精度保存形スキーム, 土木学会論文集, Vol. 2003, No. 747, pp. 85–94, 2003.
- 2) 牛島省, 禰津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698, pp. 11–19, 2002.
- 3) 本西亮太, 牛島省: 密度流の数値解析における圧力計算の前処理法, 土木学会論文集, Vol. 79, No. 15, 22-15029, pp. 1–12, 2023.
- 4) Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D.: A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 70, No. 2, pp. 439–462, 1987.