

## 広域の氾濫被害予測に向けた不連続ガラキン法による浅水長波ソルバー (シンポジウム講演概要)

### A shallow water solver for wide-area inundation damage prediction using discontinuous Galerkin method (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

松本 礼央 (九州大・工)      田中 聖三 (広島工業大・工)      浅井 光輝 (九州大・工)  
Reo MATSUMOTO, Kyushu University  
Seizo TANAKA, Hiroshima Institute of Technology  
Mitsuteru ASAI, Kyushu University  
E-mail: r-matsumoto@doc.kyushu-u.ac.jp

Shallow water equations are widely used for river flooding, storm surge, tsunami, and other natural disaster simulations. In this context, a continuous Galerkin (CG) method with artificial viscosities and stabilizers has often been used to discretize the space. Although the CG method can produce robust simulations, the numerical solution cannot satisfy conservation laws of mass, momentum and flux on the finite element edges. Then, a discontinuous Galerkin (DG) method, which is effective and promising tools for the hyperbolic equations with discontinuities, has been expected for the next generation numerical simulation tool. In this study, the DG method is applied to the spatial discretization for the shallow water equations, and wetting-drying algorithm and slope limiter are discussed for our purpose. The proposed method has been verified with two fundamental examples. In addition, we find that the proposed method provides better performance in its accuracy than that of CG method.

#### 1. 緒言

河川の氾濫や高潮などの数値解析には、浅水長波方程式が広く用いられている。浅水長波方程式は双曲型の偏微分方程式であり、不連続な解を有することによる数値不安定性が生じるため、空間の離散化に CG (continuous Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法が多く用いられてきた。しかし、CG 法では、人工的な粘性による解のなまりや、質量保存などの保存則を厳密に満足できないなどの問題点がある。そこで、保存性を満足できる有限体積法の良さをもち併せる DG (discontinuous Galerkin) 法が期待されている。DG 法は、浅水長波方程式などの不連続な解を有しやすい双曲型方程式の解析に対して有効であり、要素境界での Flux の収支を考慮して解析を行うため、局所的な保存性を満足できるという性質を持つ。本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築を目的とし、浅水長波方程式の空間離散化に DG 法を適用した。また、移動境界手法を導入することで、水際線の移動を有する浅水長波流れ解析を可能にした。数値解析例としてダムブレイク問題と段波問題を取り上げ、厳密解および CG 法との数値解析結果の比較により、DG 法の有用性について検討を行った。

#### 2. 数値解析手法

##### 2. 1. 支配方程式

支配方程式には、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{R} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は保存変数、 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は流束関数、 $\mathbf{R}$ はソース項であり、以下のように定義される。

$$\mathbf{U} = [h, \quad uh, \quad vh]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^T \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) &= \left[ uh, \quad u^2h + \frac{1}{2}gh^2, \quad uvh \right]^T, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{U}) &= \left[ vh, \quad uvh, \quad v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right]^T, \\ \mathbf{R} &= \left[ 0, \quad -gh \frac{\partial z}{\partial x}, \quad -gh \frac{\partial z}{\partial y} \right]^T \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $h$ は水深、 $u$ および $v$ は $x$ 、 $y$ 軸方向の断面平均流速、 $g$ は重力加速度であり、 $z$ は基準面からの高さである。

##### 2. 2. DG 法による離散化

式(1)に対し、各内部要素の集合を $\tilde{\Omega}$ 、その要素境界の集合を $\Gamma_{\text{int}}$ とし、空間方向の離散化として DG 法を適用すると、以下に示す弱形式が得られる。

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{int}}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} d\Omega = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{W}$ は要素ごとに定義される不連続な重み関数、 $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ は $\Gamma$ の外向き単位法線ベクトルである。なお、時間方向の離散化には 3 次精度の Runge-Kutta 法を用いた。

##### 2. 3. 数値フラックス

DG 法では要素境界で物理フラックスを複数有するため、数値フラックスを用いて近似を行う。式(5)左辺第 3 項のフラックスと外向き単位法線ベクトルの内積を数値フラックスに置き換え、本研究では、以下に示す Local Lax-Friedrich Flux<sup>1)</sup>を用いる。

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^-)] - \frac{a_{\max}}{2} (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-) \quad (6)$$

ここで、 $a_{\max}$ は流速と波速の絶対値の和である。また、 $\mathbf{U}^+$ 、 $\mathbf{U}^-$ は、要素境界における値であり、要素境界であらかじめ設定された法線ベクトルの方向の値を $\mathbf{U}^+$ とし、もう一方の値を $\mathbf{U}^-$ と定義する。

##### 2. 4. Slope Limiter 処理

段波などの不連続面を有する問題を解いた際に発生するオーバーシュートやアンダーシュートを抑制するために、本研究では Slope Limiter 処理<sup>2)</sup>を適用する。この処理を Runge-Kutta 法の各ステップ後に行う。

##### 2. 5. 移動境界手法

陸域での洪水氾濫を解く場合、移動する水際境界を考慮する必要がある。本研究では、あらかじめ広域にわたりメ

ッシュ分割を行い、その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めていく手法を用いる。本手法では、設定した微小水深と、浅水長波方程式を解き、得られた水深の大きさから陸水判定を行う。要素内の3節点全てが微小水深以下となった場合、その要素は陸域とする。水際要素の流速については無抵抗となる境界条件を与える。

### 3. 数値解析例

本手法の有効性について検討するために、数値解析例としてダムブレイク問題、段波問題を取り上げ、厳密解およびCG法による数値解析結果との比較を行う。なお、CG法の空間方向の離散化にはSUPG法による安定化有限要素法、時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を用い、要素としてはDG法、CG法ともに三角形1次要素を用いた。

#### 3. 1. ダムブレイク問題での検証

解析モデルをFig. 1に示す。 $x, y$ 方向分割幅はそれぞれ0.1[m], 0.5[m]とし、時間増分は $1.0 \times 10^{-4}$  [s], DG法の微小水深は $2.0 \times 10^{-4}$  [m], CG法の微小水深は $5.0 \times 10^{-3}$  [m]とした。解析結果として、Fig. 2は2秒後の水面形状、流速分布について示したものである。図より、CG法と比較してDG法による結果は、水の到達域をより正しく評価でき、水面形状、流速分布ともに厳密解とよい一致を示した。

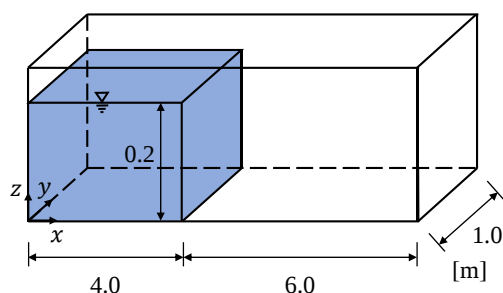


Fig. 1 Schematic defining the dam-break problem

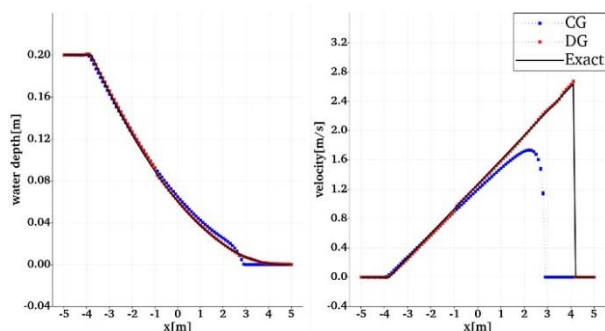


Fig. 2 The computed solutions of the dam-break problem

#### 3. 2. 段波問題での検証

解析モデルをFig. 3に示す。 $x, y$ 方向分割幅はそれぞれ0.1[m], 0.5[m]とし、時間増分は $1.0 \times 10^{-4}$  [s]とした。解析結果として、Fig. 4は1秒後の水面形状、流速分布について示したものである。図より、CG法と比較してDG法による結果は、厳密解とよい一致を示しているものの、不連続面においてオーバーシュート、アンダーシュートが発生していた。一方、Fig. 5はSlope Limiter処理を導入した場合の1秒後の水面形状、流速分布について示したものである。図より、Slope Limiter処理を導入することで不連続面での数値振動が抑制されているものの、過度ななまりが生じていることが確認できる。

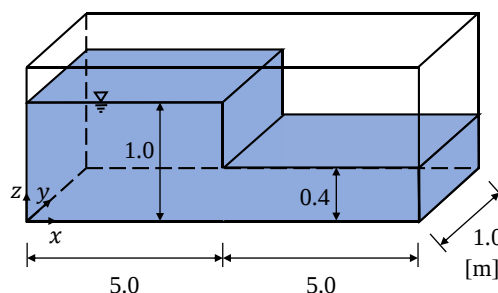


Fig. 3 Schematic defining the bore problem

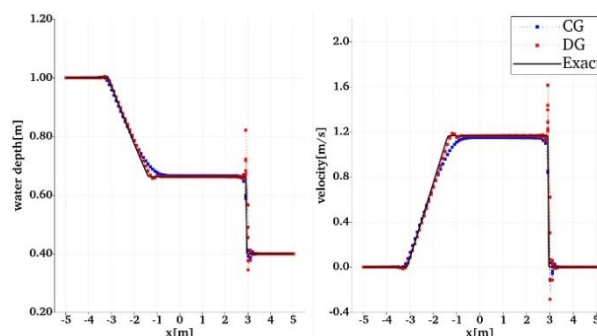


Fig. 4 The computed solutions of the bore problem

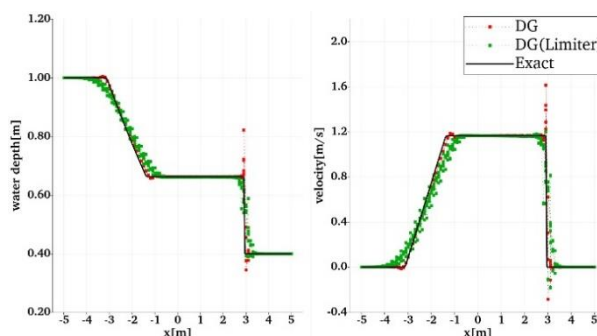


Fig. 5 The computed solutions with Slope Limiter of the bore problem

### 4. 結言

本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築として、空間方向の離散化にDG法を用いることを提案した。さらに、ダムブレイク問題、段波問題での検証を行い、厳密解および従来のCG法との数値解析結果の比較を行った。それにより浅水長波流れ解析においてDG法が有効であることが確認できた。今後の方針として、不連続面での数値振動抑制のために最適なLimiter処理を導入し、さらにはDG法の利点である局所的な高精度化(直交基底高次補間要素)を適用することでより高速かつ高精度なソルバーへと発展させる予定である。

### 参考文献

- 1) Nouh Izem, Mohammed Seaid, Imad Elmahi, and Mohamed Wakrim: Discontinuous Galerkin method for two-dimensional bilayer shallow water equations, *J. Eng. Math.*, Vol. 96, No. 1, pp. 1-21, 2016.
- 2) Louis J Durlafsky, Bjorn Engquist, and Stanley Osher. Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, Vol. 98, No. 1, pp. 64-73, 1992.