

座標変換を有する底面境界適合型粒子法の SPH(2)による高精度化 (シンポジウム講演概要)

A bottom boundary-fitted particle method using coordinate transformation with SPH(2) (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

藤岡 秀二郎 (九州大・工) 辻 勲平 (九州大・工) 三目 直登 (筑波大・シ) 浅井 光輝 (九州大・工)
Shujiro FUJIOKA, Kyushu University
Kumpei TSUJI, Kyushu University
Naoto MITSUME, Tsukuba University
Mitsuteru ASAI, Kyushu University
E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp

We proposed a second-derivative model satisfying the Taylor expansion up to 2nd-order terms to improve accuracy of SPH method named SPH(2). SPH(2) shows a good convergence in the Lid-driven cavity and Karman vortex problems without free surface, and it can simulate free surface problem. In this study, a bottom boundary-fitting coordinate transformation in the free surface problem is implemented in SPH(2) so that complex outer solid boundary geometries can be treated with simple straight boundaries in the computational domain. We demonstrated the feasibility and stability of the proposed model with a couple of examples and confirmed its validity compared with an experimental result.

1. 緒言

連続体解析に用いられる SPH, MPS などの粒子法では、大変形を伴う自由表面問題や流体の分裂・結合現象を容易に表現できるという利点がある。一方で、粒子法では一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じた固定したカーネル関数(重み関数の一種)を使った内挿近似を行うため、粒子配置が乱れた場合、計算精度が担保されない。この課題に対し本研究グループでは Taylor 展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデル(以下、SPH(2)と略記)を提案し、複数の例題を通して、既往の SPH モデルに比べて収束性と安定性に優れていることを確認してきた¹⁾。

本研究では、2 階の混合微分が必要となる壁面境界適合用の座標変換を SPH(2)で実行し、微分モデルとしての優位性を示すとともに、複雑な壁面境界を持つ問題の効率的な解析手法を提案する。

2. 座標変換の概要

本研究では松本らが提案した底面境界適合型 MPS 法²⁾と同様の座標変換を用いて検証を行った。本手法では、解析領域内においてヤコビアンが一定となるような座標変換を用いることで、各粒子が保持する体積の変化を防止しながら、境界の扱いを単純にした。

Fig.1 の破線で示す x 軸に平行な基準面からの底面境界の高さを $h(x)$ としたとき、座標変換は以下のように定義される。

$$\xi = x \quad (1)$$

$$\zeta = y - h(x) \quad (2)$$

この座標変換のヤコビ行列 J は以下のように表される。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{dh}{dx} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで正規座標系の勾配作用素を

$$\hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

と表すとき、実空間での勾配、ラプラシアンはヤコビ行列 J を用いてそれぞれ以下の式で表される。

$$\nabla \phi = J \hat{\nabla} \phi \quad (5)$$

$$\nabla^2 \phi = J \hat{\nabla} \cdot J \hat{\nabla} \phi = \mathbf{c}_{\text{trans}} \cdot \hat{\mathbf{D}} \phi \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_{\text{trans}} := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2 h}{dx^2} & 1 & -2\frac{dh}{dx} & 1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{D}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} & \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

以上の微分作用素を用い、 $\xi - \zeta$ 座標系における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を表すと次のようになる。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} J \hat{\nabla} p + \nu \mathbf{c}_{\text{trans}} \cdot \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (9)$$

ここで $\mathbf{u}, \rho, p, \nu, \mathbf{g}$ はそれぞれ流体の流速、密度、圧力、動粘性係数、重力加速度である。 $\xi - \zeta$ 座標系において式(5),(6)で示した勾配とラプラシアンを評価することで $x - y$ 座標系における流体の運動を解くことが可能となる。

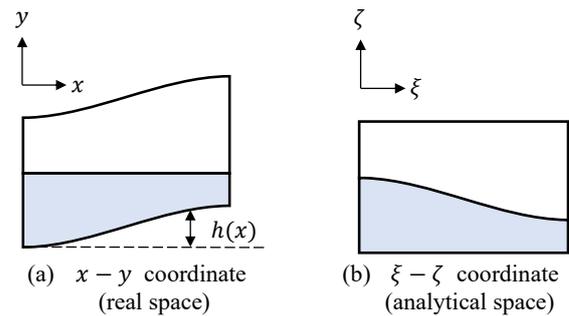


Fig.1 Schematic view of coordinate transformation.

3. 離散近似モデル

前章で示したように、座標変換を用いる際には 1 階微分と 2 階微分をそれぞれ評価できる離散近似モデルが必要となる。特にラプラシアンでは 1 階微分と 2 階微分の総和の形で表記されるため、誤差の累積を防ぐためにそれぞれ高精度なモデルを使用する必要がある。本研究では SPH 法で広く用いられる 1 次精度の修正勾配モデルと、本研究グループが提案した Taylor 展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデルを用いた。

勾配モデルは以下の式で表される.

$$\langle \nabla \phi \rangle_i := \bigcup_{j \in \mathcal{S}_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (\tilde{\nabla} w_{ij} := L_i \nabla w_{ij}) \quad (10)$$

$$L_i := \left[\bigcup_{j \in \mathcal{S}_i} V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \right]^{-1} \quad (11)$$

V_j は j 粒子の代表体積, ϕ_i は i 粒子の物理量 ($\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$), w_{ij} は j 粒子の i 粒子に対する重み, \mathbf{x}_i は i 粒子の位置ベクトル ($\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$) を示す.

また 2 階微分モデルは以下の式で表される.

$$\left[\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\rangle_i \quad \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\rangle_i \quad 2 \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right\rangle_i \right]^T \\ := 2[\mathbf{M}_i]^{-1} \bigcup_{j \in \mathcal{S}_i} V_j F_{ij}[\mathbf{q}_{ij}] (\phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i) \quad (12)$$

$$[\mathbf{M}_i] := \bigcup_{j \in \mathcal{S}_i} V_j F_{ij}[\mathbf{q}_{ij}] [\mathbf{p}_{ij}]^T \quad (13)$$

$$F_{ij} := \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \quad (14)$$

$$[\mathbf{q}_{ij}] := [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij} y_{ij}]^T \quad (15)$$

$$[\mathbf{p}_{ij}] := [A(x, x) \quad A(y, y) \quad A(x, y)]^T \quad (16)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \bigcup_{k \in \mathcal{S}_i} V_j a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (17)$$

4. 三角形障害物を有する水柱崩壊問題での検証

4. 1. 解析手法・モデル

本研究では, 解析手法として非圧縮性流体を対象とした半陰解法型の安定化 ISPH 法³⁾を採用した. また, 本検証では, 負圧による過度な粒子凝集を防ぐため, 粒子配置を規則的な状態へと近づける PS (Particle Shifting) 法を導入している. 解析モデルは三角形障害物を有する水柱崩壊問題 (Fig.2) を対象とした. 本問題では実験⁴⁾が実施されており, その結果との比較により本手法の妥当性を確認する.

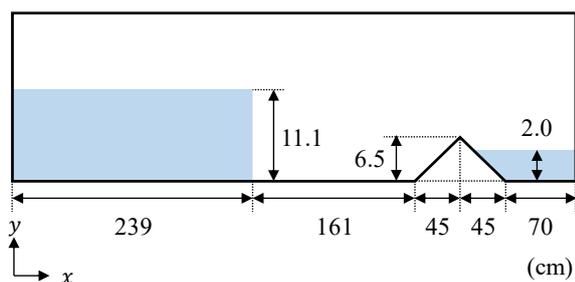


Fig.2 Schematic diagram of dam-break problem.

4. 2. 解析結果

解析結果を Fig.3, Fig.4 に示す. Fig.3 より 1.8 s 頃に三角形障害物を越流し, 3.0 s から 8.4 s の間に下流側の壁で波が 2 回反射し上流側に戻っていく実験と同様の結果が得られた. また 15.5 s における $\xi - \zeta$ 座標との比較より, 三角形障害物上で適切に座標変換が行われ圧力の乱れも見られないことから, 提案モデルの近似が座標変換や自由表面を有する問題に対しても妥当であることが言える. さらに, 上流側の壁から 393.5 cm 地点の水深の時間遷移

(Fig.4) を実験値と比較すると, 波の伝播にわずかな遅れが生じているものの, 概ね一致する結果が得られた.

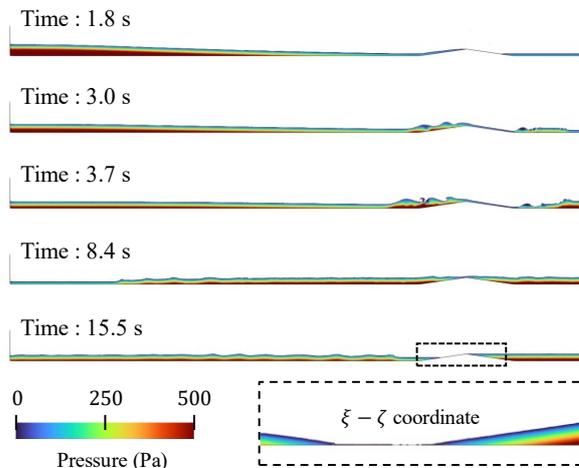


Fig.3 Time transitions of waves

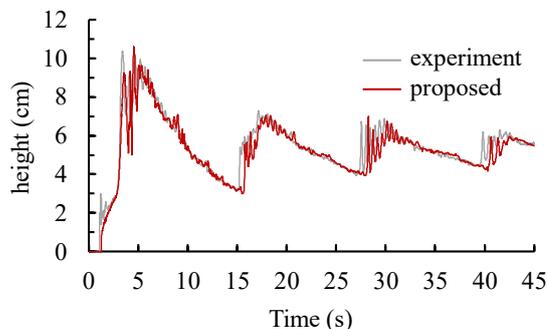


Fig.4 Time transition of free surface height ($x = 393.5$ cm)

5. 結言

本研究では 2 階微分を SPH(2) でモデル化した壁面境界適合型 SPH 法を提案した. 三角形障害物を有する水柱崩壊問題の解析を通して, 座標変換による効率的かつ高精度な解析が可能であることを示した. SPH 法などの粒子法では粒子の規則配置が精度を担保するためには重要な要素となるが, 例えば水深方向に座標を歪ませる σ 座標などの座標変換を施せば計算コスト減らすことができる可能性を秘めている. 提案手法はそのための第一段階であり, 高精度な 2 階微分モデルである SPH(2) により実現できた成果である.

参考文献

- 1) 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝: 高精度 SPH 法 ~空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分~, 土木学会論文集, Vol. 79, No. 15, 2023.
- 2) 松本久也, 井元佑介, 浅井光輝, 三目直登: 底面境界適合型 MPS 法の開発, 日本計算工学会論文集, No. 20210017, 2021.
- 3) M. Asai, A. M. Aly, Y. Sonoda and Y. Sakai: A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *J. Appl. Math.*, 2012, Article ID 139583, 2012.
- 4) S. Soares-Frazão: Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill, *J. Hydraul. Res.*, Vol. 45, pp. 19-26, 2007.