

膜ロッキング回避を目的とした IGA 曲線はり要素への $\bar{B}$ 投影法の適用 (シンポジウム講演概要)

Application of the $\bar{B}$ projection method to an IGA curved beam element for avoiding membrane locking (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

長谷部 寛 (日本大・理工) 唐澤 奈央子 (日本大・理工 [研究当時])
Hiroshi HASEBE, Nihon University
Naoko KARASAWA, Nihon University
E-mail: hasebe.hiroshi@nihon-u.ac.jp

In the present study, the membrane locking that occurred in an IGA curved beam was investigated. Even if we used a higher-order NURBS basis function, the membrane locking could not be avoided. Therefore, we implemented the $\bar{B}$ projection method. As a result, the oscillation of axial force was alleviated. The membrane locking was avoided as well as the FEM curved beam element.

1. はじめに

構造物の変位や応力評価のための有限要素解析には種々の要素が用いられる。構造要素のはり要素はその一つであるが、直線はり要素が用いられることが多く、曲線を折れ線近似するなどの形状誤差を含んだ解析になることが一般的である。

一方で Hughes らにより提案された Isogeometric Analysis (IGA) ¹⁾は、CAD の形状表現に用いられる NURBS に代表されるスプライン関数を基底関数に採用することで、CAD で描いた形状を厳密に保持し、形状誤差の無い解析を実現する。

FEM 同様、IGA でも様々な要素が開発されており、著者はベルヌーイ・オイラーはり理論に基づく IGA 曲線はり要素を構築した ²⁾。しかし、これまでの検討過程で、高次の NURBS 基底関数を用いたとしても、FEM の曲線はり要素と同様にロッキングは避けられないことを確認している。

IGA 曲線はり要素のロッキング回避策は、主としてティモシェンコはり要素を対象に検討されているが ³⁾、ベルヌーイ・オイラーはり要素に対しては、Casquero らにより 2 次の NURBS 基底関数と $\bar{B}$ 投影法 ⁴⁾ を用いた膜ロッキング回避策が提案された ⁵⁾。しかし、はり要素に対して 2 次の NURBS 基底関数を用いた場合、変位の 2 階微分項を含む曲げモーメントが要素間で不連続となり、解析精度が低下する。そのため、3 次以上の NURBS 基底関数を用いた IGA はり要素において、膜ロッキング回避策に関する検討を行う必要があると考えられる。

そこで本研究では、これまで構築した IGA 曲線はり要素を用い、3 次以上の NURBS 基底関数を採用した際の膜ロッキング発生状況の確認、ロッキング回避策とその働きについて検討した。

2. NURBS 曲線と基底関数

式 (1) に示す NURBS 曲線 $\mathbf{C}(\xi)$ は、式 (2) に示す NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ とコントロールポイントの位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ の線形結合で表される。

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (1), \quad R_i^p(\xi) = \frac{N_i^p(\xi) w_i}{\sum_{a=1}^n N_a^p(\xi) w_a} \quad (2)$$

ここで、 ξ はパラメータ空間の座標、 w_i はコントロールポイントにおける重み、 p は基底関数の次数、 n はコントロールポイント数、 $N_i^p(\xi)$ は B-Spline 基底関数と呼ばれる再帰的な関数であり、次式で表される。

($p = 0$ のとき)

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3a)$$

($p \geq 1$ のとき)

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (3b)$$

ここで、 ξ_i はノットと呼ばれるパラメータであり、IGA では要素の境界を表す局所座標値である。

3. 支配方程式と離散化

支配方程式には Kirchhoff 仮定を適用した式 (4) に示す平衡方程式を用い、ひずみと力の関係には線形弾性体を仮定して式 (5) を用いた。また、ひずみは断面内でひずみが線形分布することを仮定し、式 (6) を用いた。

・平衡方程式

$$N' - kV + q_t = 0, V' + kN + q_n = 0, M' + V + q_\theta = 0 \quad (4)$$

・ひずみと断面力の関係

$$N = \epsilon EA, \quad M = \chi EI \quad (5)$$

・ひずみの定義

$$\epsilon = u_t' - k u_n, \quad \theta = u_n' + k u_t, \quad \chi = \theta' = u_n'' + k' u_t + k u_t' \quad (6)$$

ここで、 N は軸力、 V はせん断力、 M は曲げモーメント、 k は曲率、 q_t は接線方向の分布荷重、 q_n は法線方向の分布荷重、 q_θ はモーメント分布荷重、 $(\cdot)'$ は弧長パラメータ s による 1 階微分、 $(\cdot)''$ は 2 階微分、 ϵ は膜ひずみ、 χ は曲げひずみ、 E はヤング率、 A は断面積、 I は断面二次モーメント、 u_t は接線方向変位、 u_n は法線方向変位、 θ はたわみ角である。

ここで、式 (5)、(6) を式 (4) に代入し、部分積分を行うと次式 (7) の仮想仕事の原理が導かれる。

$$\int_0^L (\epsilon^* N + \chi^* M) ds = \int_0^L (u_t^* q_t + u_n^* q_n + \theta^* q_\theta) ds + [u_t^* \bar{N} + u_n^* \bar{V} + \theta^* \bar{M}]_r \quad (7)$$

ここで、 L ははりの長さ、 $(\cdot)^*$ は重み関数、 $(\cdot)_r$ は境界値である。

変位の近似関数は NURBS が C^{p-1} 連続であるため未知変数にたわみ角を持たせず式 (8) のように構成し、Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した。

$$u_t(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) u_{t_i}, \quad u_n(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) u_{n_i} \quad (8)$$

ここで、 $(\cdot)_i$ はコントロールポイント値である。

4. $\bar{B}$ 投影法

膜ロッキングは式(7)で示した仮想仕事の原理の左辺第一項の膜ひずみ ϵ に起因して生じる。 $\bar{B}$ 投影法はこれを $\bar{B}$ ひずみ $\bar{\epsilon}$ に置きかえることで、ロッキングを回避できる手法である^{3), 5)}。

$\bar{B}$ ひずみ $\bar{\epsilon}$ は次式(9)で計算される。

$$\bar{\epsilon} = \sum_{A=1}^{\tilde{n}} \tilde{R}_A^p \bar{\epsilon}_A, \bar{\epsilon}_A = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \tilde{R}_B^p \epsilon ds, \tilde{M}_{AB} = \int_0^L \tilde{R}_A^p \tilde{R}_B^p ds \quad (9)$$

ここで、 $\tilde{n}$ は1次低いNURBS基底関数のコントロールポイント数、 $\tilde{R}_A^p$ は1次低いNURBS基底関数、 $\tilde{M}_{AB}$ は1次低いNURBS基底関数で構成される質量マトリクスである。

5. 純曲げを受ける円弧はりの解析

膜ロッキングに対する $\bar{B}$ 投影法の効果を検証するため、非伸縮変形となる純曲げを受ける円弧はりの解析を行った。解析モデルと解析条件をFig.1に示す。解析モデルは一端を固定した半径1mの1/4円弧はりとした。純曲げ状態とするため荷重は分布モーメント $q_\theta = 1 \text{ Nm/m}$ を満載した。断面形状およびヤング率は図中に記すとおりであるが、膜ロッキングが生じるよう、曲率に対する断面高さの比率を十分小さく設定した。

解析モデルを3次のNURBS基底関数に基づく4要素で分割した。要素係数マトリクスの数値積分にはガウス求積法を用い、全ての解析ケースで積分点数を10点とした。 $\bar{B}$ 投影法の効果を検証するため、 $\bar{B}$ 投影法を用いた場合、用いない場合の2種類の定式化で解析を行い、結果を比較した。

Fig.2は変位を3倍にして描いた変形図である。参照解として、3次のNURBS基底関数に基づく512要素で分割し解析した結果を掲載した。 $\bar{B}$ 投影法を用いない場合、変形は小さくロッキングが生じていることが確認できた。これに対して $\bar{B}$ 投影法を用いた場合、参照解を捉えられた。

続いて $\bar{B}$ 投影法の効果を検証した。Fig.3は円弧はりの軸線に沿った軸力分布を示したものである。軸力は、式(5)に示したように、膜ひずみ ϵ にヤング率 E 、断面積 A を乗じたものであり、本研究では EA = 一定であることから、膜ひずみの分布と等価である。

PrathapらがFEM曲線はり要素で示した結果と同様に⁶⁾、 $\bar{B}$ 投影法を用いない場合は3次NURBS基底関数に基づくIGA曲線はり要素でも物理的には生じない軸力の数値的振動が生じていることが確認された。この振動が偽りの剛性となり、ロッキングを生じさせている。一方で、 $\bar{B}$ 投影法を用いると軸力(膜ひずみ)の数値的な振動が解消されたことが確認できる。これによりロッキングが回避されたと解釈できる。なお、グラフのスケールの関係上、軸力がゼロになっているように見えるが、実際には完全にはゼロになっていない。

5. まとめ

本研究ではベルヌーイ・オイラーはり理論に基づいて構築したIGA曲線はり要素に生じる膜ロッキングに着目し、 $\bar{B}$ 投影法を用いてその解消を図った。3次のNURBS基底関数を用いた場合であっても、軸力(膜ひずみ)に数値的振動が生じることで、ロッキングが発生することを確認した。 $\bar{B}$ 投影法を用いることで軸力の数値的振動が解消し、その結果としてロッキングが回避されることを確認した。今後は純曲げ以外の条件において $\bar{B}$ 投影法が同様の働きを有しロッキングを解消するか検討する必要がある。

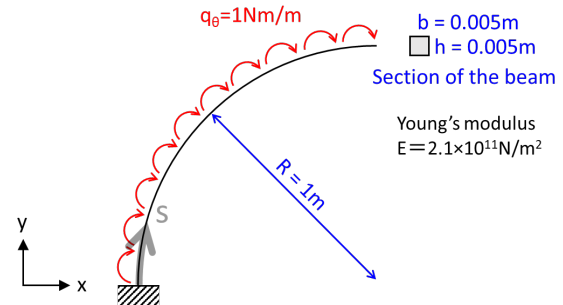


Fig. 1 Computational model and condition

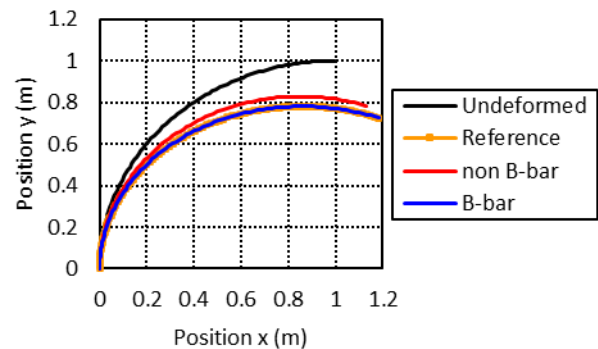


Fig. 2 Deformation of the beam with multiplying displacement by a factor of 3

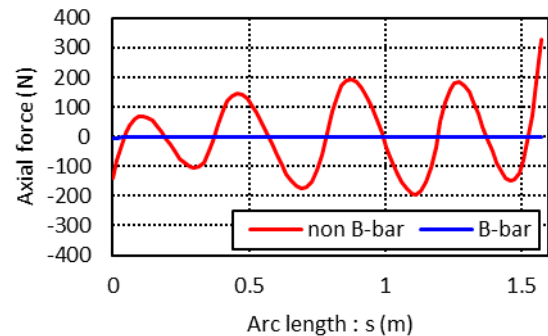


Fig. 3 Axial force along with the arc length

参考文献

- 1) J. A. Cottrell et al.: Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.
- 2) 唐澤ら: NURBS 基底関数を用いた曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素の構築, 土木学会論文特集号(応用力学), 15 巻, 2023. (掲載決定)
- 3) R. Bouclier et al.: Locking free isogeometric formulations of curved thick beams, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 245-246, pp.144-162, 2012.
- 4) T. Elguedj et al.: B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 197, pp.2732-2762, 2008.
- 5) H. Casquero et al.: Removing membrane locking in quadratic NURBS-based discretizations of linear plane Kirchhoff rods: CAS elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 399, 115354, 2022.
- 6) G. Prathap: The Finite Element Method in Structural Mechanics, Springer, 1993.