

安定化陰的 MPM における粒子－格子間通信スキームの影響（シンポジウム講演概要）

Influence of Particle-Grid Transfer Schemes in stabilized implicit MPM

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

川野 慎之介（広島大・先） 三原 康平（広島大・工） 橋本 涼太（広島大・先）
Shinnosuke KAWANO, Hiroshima University
Kohei MIHARA, Hiroshima University
Ryota HASHIMOTO, Hiroshima University
E-mail: m222225@hiroshima-u.ac.jp

This study examines the effects of different particle-grid transfer schemes on incompressible fluid analyses by stabilized implicit Material Point Method (MPM). Stabilized implicit MPM with several transfer schemes, i.e., Particle-in-Cell (PIC), Fluid-Implicit Particle (FLIP), and Taylor Particle-in-Cell (TPIC) was applied to two numerical examples. The results showed that TPIC improves the accuracy and stability of free-surface shape and velocity profile.

1. 背景と目的

Material Point Method (MPM) ¹⁾は粒子と格子を併用した連続体解析手法であり、現在は流体解析にも適用されている。MPM では各ステップで粒子から格子、格子から粒子への運動学的変数の投影・補間が行われ、その粒子－格子間の通信スキームとして複数の方法が提案されている。そのスキームにより計算の精度や安定性が影響を受けることが知られているが、時間離散化に陽解法を用いた検討例 ²⁾はあるものの、陰解法での検討例は限られている。本研究では、三原らが提案した非圧縮粘性流体のための安定化陰的 MPM³⁾において、Particle-in-Cell (PIC), Fluid-Implicit Particle (FLIP), Taylor-Particle-in-Cell (TPIC) ²⁾といった通信スキームによる解析結果への影響について検討する。

2. 安定化陰的 MPM と粒子－格子通信スキームの概要

MPM は、解析領域を粒子に分割し、質量などの物理量を背後に設けた有限要素メッシュの節点に投影し支配方程式を解き、得られた変位場を粒子に補間することで物体の大変形を表現する。本研究では、非圧縮粘性流体を対象として運動量保存則と連続式を連成して変位と圧力を同時に解く安定化陰的 MPM³⁾を用い、形状関数には二次 B-spline 基底関数を用いた。

当該手法では、陽解法による MPM と同様、各時間ステップの最初に粒子が持つ速度を有限要素メッシュの節点へと投影する。その計算式が粒子－格子間通信スキームによって異なり、PIC および FLIP では次式が用いられる。

$$\mathbf{v}_I^m = \frac{\sum_{p=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}_p^m) M_p \mathbf{v}_p^m}{\sum_{p=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}_p^m) M_p} \quad (1)$$

ここに、上付き添字 m は時間ステップを、下付き添字の I は節点、 p は粒子 p の物理量を各々表し、 $\mathbf{v}$ は速度、 $\mathbf{x}$ は位置、 n_p は粒子数、 $N_I(\mathbf{x})$ は節点 I の形状関数、 M は質量を表す。つまり、粒子の運動量を節点に分配し、同じく粒子から節点に分配された質量で除して節点速度を計算する。一方、TPIC²⁾では粒子速度の一次テイラー級数近似を使用し

$$\mathbf{v}_I^m = \frac{\sum_{p=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}_p^m) M_p (\mathbf{v}_p^m + \nabla \mathbf{v}_p^m \cdot (\mathbf{x}_I^m - \mathbf{x}_p^m))}{\sum_{p=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}_p^m) M_p} \quad (2)$$

で節点速度を計算する。粒子近傍の速度の空間勾配の情報を保持し、これを考慮して節点の運動量を評価する。なお、本研究では Newmark の β 法の使用に伴い節点加速度の計算も必要となるが、式(1)または(2)と同様の式を使用した。

方程式を解いて節点での運動学的変数が更新されたら、

それを粒子へと補間する。FLIP⁴⁾（陰解法の場合）は、

$$\mathbf{v}_p^{m+1} = \mathbf{v}_p^m + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{I=1}^{n_{nd}} N_I(\mathbf{x}_p^m) (\mathbf{a}_I^m + \mathbf{a}_I^{m+1}) \quad (3)$$

PIC および TPIC は、

$$\mathbf{v}_p^{m+1} = \sum_{I=1}^{n_{nd}} N_I(\mathbf{x}_p^m) \mathbf{v}_I^{m+1} \quad (4)$$

で粒子の速度を計算する。ここで Δt は時間増分、 $\mathbf{a}$ は加速度、 n_{nd} は節点数を表す。FLIP は節点加速度を補間し台形則で粒子速度を更新するのに対し、PIC と TPIC では更新後の節点速度を粒子へ直接補間し計算する。粒子の加速度はいずれのスキームでも式(4)と同様に節点値が補間される。なお、二次 B-spline 基底関数を形状関数として単純に用いて TPIC を使用すると、メッシュの端部で形状関数が Partition of Unity 条件等を満たさないことに起因して計算が不安定になることが知られており、本研究では Nakamura *et al.* の Kernel Correction²⁾も適用した。以下、各スキームを用いた安定化陰的 MPM の解析結果を二つの計算例で比較する。

3. ダムブレイク流れの解析

まず、三原ら ³⁾と同じダムブレイク流れの解析を行った。584 mm 四方の水槽の左端に幅 146 mm、高さ 292 mm の水柱を設置した。計算格子は縦 40 セル×横 40 セルとし、各方向の境界条件は free-slip とした。液相粒子は 1 つの要素に 4 (2×2) 個とし、1 ステップ当たりの時間増分は 1.0×10^{-3} s で、5.0 s まで自重のみを与えて解析した。

Fig. 1 に解析開始から 0.3, 0.6, 5.0 s 時点の速度分布を示す。図中には OpenFOAM に含まれる Volume Of Fluid 法による自由表面流れ解析ソルバー interFoam による解析結果の水面形を合わせて表示している。水柱が崩れて壁面と衝突するまでの 0.3, 0.6 s の水面形を見ると PIC では粘性の高い流体挙動が確認できる。これは、既往研究でも知られているように粒子と節点間で速度情報を通信する際に、運動量の数値散逸が発生したためであると考えられる。一方、FLIP と TPIC では過度な減衰を生じることなく、OpenFOAM と概ね一致する結果となった。

次に、水面が安定した 5.0 s 時点の FLIP と TPIC の結果を見ると、FLIP では速度分布に空間的なばらつきがみられ、水面付近での粒子の配置も滑らかでないのに対し、TPIC では連続した速度分布を示し、水面の粒子の分布も滑らかである。これは粒子速度の更新式の違いに起因すると考えられる。というのは、FLIP (式(3)) では前の時間ステップの

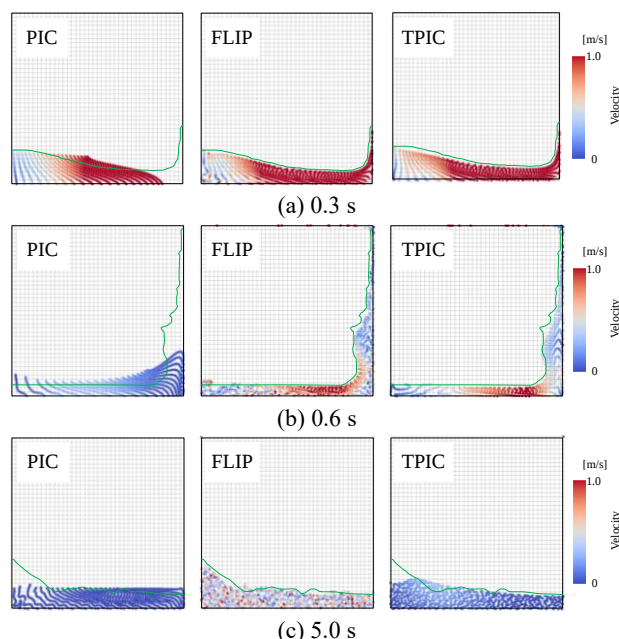


Fig. 1 Velocity distribution (green line: OpenFOAM).

粒子速度を用いて算出するため、例えば水面の結合のように元々連続していなかった粒子どうしが同じ格子に侵入した場合に斑な速度分布を生じる。一方、式(4)を用いる TPIC では節点速度を直接補間することで連続した速度分布が得られる。

以上より粒子-格子間の通信スキームによって、数値減衰や速度分布の状況が大きく異なることが分かった。

4. 正方形流体片の回転に伴う変形解析

既往研究²⁾では、TPIC は速度の勾配を考慮して節点に投影することで、回転を伴う運動の表現性能を高められることが示されている。そこで、次に SPH 法や MPS 法といった他の粒子法の計算の安定性に関するベンチマーク問題の一つである、正方形流体片の回転解析 (Fig. 2)⁵⁾を行った。5.0 m 四方の計算領域を 100×100 要素の計算格子に分割し、その中心に一边 1.0 m の正方形流体片を配置した。流体粒子は 1 つの計算格子に 36 (6×6) 個とした。流体片の中心周りに初期角速度 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ を与え、1 ステップ当たりの時間増分は $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ とし、 $t\omega = 4.0 \text{ rad}$ まで解析を行った。なお、前章の結果を踏まえ FLIP と TPIC のみの結果を示す。

Fig. 3(a)に $t\omega = 4.0 \text{ rad}$ 時点での水圧分布、(b)に(a)内での実線長方形の拡大図を示す。図中の緑線は初期の正方形の頂点が描く理論的な軌跡である。FLIP, TPIC とともに初期の正方形の頂点が外側へと伸びていく様子が大変形領域まで安定して解析できている。なお、流体片の中心付近で負圧が発生し、また、その分布は滑らかであり、圧力振動等の不安定性は見られない。これらは安定化陰的 MPM で採用されている PSPG 法による圧力安定化の効果であると考えられる。また、当該手法では速度と圧力を分離して解く半陰解法で必要な表面粒子の探索と圧力境界条件の付与が不要なため、それによる誤差が入り込まないことも一因として考えられる。

頂点の軌跡については、理論解に比較すると FLIP と TPIC とともに伸びが小さかった。これは粒子および格子の解像度が粗かったことによると考えられ、今後検討を要する。頂点の先端の形状に着目すると、FLIP では先端が膨らんで

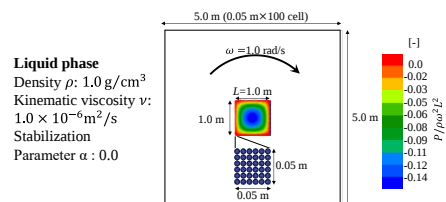


Fig. 2 Analytical model for square fluid patch.

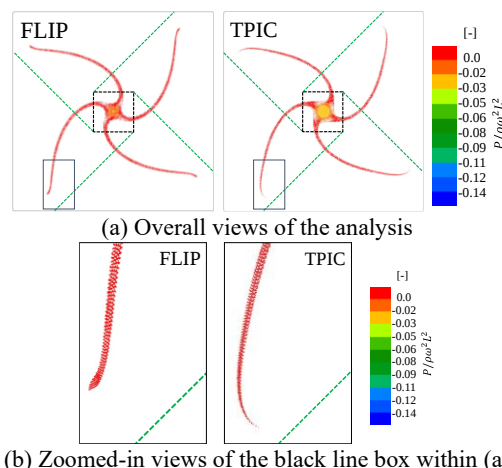


Fig. 3 Pressure distribution at $t\omega = 4.0 \text{ rad}$ (green dotted lines: theoretical trajectories of the vertices, black dotted lines: initial square).

いるのに対し、TPIC では $t\omega = 4.0 \text{ rad}$ までシャープな先端形状を保っている。このように、安定化陰的 MPM においても回転を伴う運動における TPIC の優位性が確認できた。

5. まとめ

非圧縮粘性流体のための安定化陰的 MPM における粒子-格子間の通信スキームが解析結果に及ぼす影響を検討することを目的に、PIC, FLIP, TPIC の各スキームを使用してダムブレイク流れと正方形流体片の回転解析を行った。

粒子近傍の速度勾配を考慮して節点速度分布を再構築する TPIC では PIC で生じる運動量の数値散逸が解消でき、かつ FLIP で見られる速度分布の空間的なばらつきも抑制されることが確認できた。また、回転を伴う流体運動同時に角運動量も十分に保存されることが分かった。したがって、流体のような速度分布が重要、かつ大変形を伴う対象の解析に TPIC を採用した安定化陰的 MPM が有効であると考えられる。

参考文献

- 1) Sulsky *et al.*: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *J. Comput. Phys.*, Vol. 87, pp. 236-252, 1995.
- 2) Nakamura *et al.*: Taylor particle-in-cell transfer and kernel correction for material point method, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 403, 115720, 2023,
- 3) 三原ら: 非圧縮粘性流体のための安定化陰的 MPM, 第 26 回応用力学シンポジウム, 2023 (投稿中)。
- 4) Iaconeta *et al.*: Comparison of a material point method and a galerkin meshfree method for the simulation of cohesive-frictional materials, *Materials*, Vol. 10, 1150, 2017.
- 5) Le Touzé *et al.*: A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 73, pp. 660-691, 2013.