2026年5月16日(土)

特別セッション | 特別セッション（OS-02：逆問題の数理的手法の近年の進展）

9:10 ~ 10:25 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-02 (1)

座長:藤原 宏志(京都大学)

9:10 ~ 9:25

[14001] 2次元定常輻射輸送方程式のエネルギー密度の最大値原理に対する上流差分スキームに基づく数値的反例

*野見山 晃成[1]、藤原 宏志[1] (1. 京都大学)

9:25 ~ 9:40

[14002] 帯状領域のLaplace方程式の Cauchy 問題に対するCarlemanの公式による数値的手法

*水盛 智哉[1]、藤原 宏志[1] (1. 京都大学)

9:40 ~ 9:55

[14003] Fictitious domain FEMおよび随伴変数法を用いた三次元熱源温度同定解析

*木村 和慎[1]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学)

9:55 ~ 10:10

[14004] 0.3 T MRIを用いた磁気共鳴エラストグラフィによるヒト肩を想定した測定条件の検討

*鈴木 慎也[1]、谷口 陽[2]、菅 幹生[1] (1. 千葉大学、2. 富士フイルム株式会社)

10:10 ~ 10:25

[14005] 深層学習による磁気共鳴エラストグラフィのための粘弾性率推定法

*野田 巽[1]、図師田 建[1]、藤原 宏志[2]、岸本 理和[3]、小畠 隆行[3]、菅 幹生[1] (1. 千葉大学、2. 京都大学、3. 量子科学技術開発機構)

特別セッション | 特別セッション（OS-02：逆問題の数理的手法の近年の進展）

10:35 ~ 11:50 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-02 (2)

座長:井手 貴範(城西大学)

10:35 ~ 10:50

[14006] 自重による梁の変形問題に対する密度型トポロジー最適化
(最適性基準法および修正最適性基準法による結果の比較)

*山田 瑞貴[1]、木村 和慎[1]、岸田 真幸[3]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学、3. 岐阜工業高等専門学校)

10:50 ~ 11:05

[14007] 地表面沈下量に基づく地盤内空洞の形状パラメータの同定解析

*渡邉 岳[1]、木村 和慎[1]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学)

11:05 ~ 11:20

[14008] 海洋短波レーダー観測データに基づく波浪スペクトル推定

*渡辺 楓[1]、谷地村 敏明[1]、寺田 翼[2]、亀田 洋志[2]、高橋 龍平[2]、水藤 寛[1] (1. 東北大学、2. 三菱電機株式会社情報技術総合研究所)

11:20 ~ 11:35

[14009] 基本解近似解法による離散 Dirichlet-to-Neumann 写像の収束性

*繁田 岳美[1] (1. 昭和薬科大学)

11:35 ~ 11:50

[14010] 電気インピーダンストモグラフィの完全電極モデルの実験データを用いた囲い込み法の適用

*井手 貴範[1]、Rautio Siiri[1]、Hauptmann Andreas[3]、Sippora Sara[2]、Siltanen Samuli[2] (1. 城西大学、2. ヘルシンキ大学、3. オウル大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-01：波動現象の数理・数値解析とその応用）

15:00 ~ 16:00 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-01 (1)

座長:丸山 泰蔵(東京科学大学)

15:00 ~ 15:15

[14011] 境界要素法による磁性流体界面流動の逐次解析

*水田 洋[1] (1. 元 北海道大学)

15:15 ~ 15:30

[14012] 境界要素法の係数行列対称性を利用したproxy法に基づく高速直接解法の効率化

*松本 安弘[1]、丸山 泰蔵[2]、Ma Qianxiang[3]、横田 理央[4] (1. 東京科学大学 情報基盤センター、2. 東京科学大学 環境・社会理工学院、3. 理化学研究所 計算科学研究センター、4. 東京科学大学 総合研究院)

15:30 ~ 15:45

[14013] 有限階作用素による境界積分方程式の安定化について

*松島 慶[1] (1. 広島大学)

15:45 ~ 16:00

[14014] フォトンのスピンを考慮した電磁波の境界要素法

*植田 毅[1] (1. 東京慈恵会医科大学)

特別セッション | 特別セッション（OS-04：能動的流体制御）

16:25 ~ 17:10 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-04 (1)

座長:深潟 康二(慶應義塾大学)

16:25 ~ 16:40

[14015] 表面帯電がLinear Plasma Synthetic Jet Actuatorの電気流体作用に与える影響

*石井 悠貴[1]、小室 淳史[2]、大友 衆示[1]、西田 浩之[1] (1. 東京農工大学、2. 産業技術総合研究所)

16:40 ~ 16:55

[14016] スパースプロセッシングPIVとプラズマアクチュエータを用いた翼周り剥離流れのリアルタイムフィードバック流体制御

*野々村 拓[1]、ビゲラ ロドリゴ[2] (1. 名古屋大学、2. 東北大学)

16:55 ~ 17:10

[14017] 進行波壁面による乱流抵抗低減制御 ― 実験研究の進展と力学機構の解明 ―

*岩本 薫[1] (1. 東京農工大学)

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

9:10 ~ 10:25 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (1)

座長：河原源太（大阪大学）

9:10 ~ 9:25

[15001] Navier-Stokes乱流における同期：データ同化とLyapunov解析によるダイナミクスの理解

*犬伏 正信[1]、Caulfield Colm-cille[2] (1. 東京理科大学、2. ケンブリッジ大学)

9:25 ~ 9:40

[15002] 粘弾性乱流境界層中の有限長角柱後流における乱流構造と高分子伸長の関係

*鷲見 竜雅[1]、仁村 友洋[1]、武藤 真和[1]、玉野 真司[1] (1. 名古屋工業大学大学院)

9:40 ~ 9:55

[15003] 高分子や界面活性剤の添加による乱流変調の物理機構

*後藤 晋[1]、増田 颯人[1]、鈴木 雅大[1]、Peruchi Zanca Augusto[1]、小井手 祐介[1]、本告 遊太郎[1] (1. 大阪大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

10:35 ~ 11:50 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (2)

座長：米田剛（一橋大学）

10:35 ~ 10:50

[15004] 円管乱流におけるマイクロバブルの時空間分布に関する実験的試み

*呉 顕峰[1]、濱名 泰久[1]、辻 義之[1] (1. 名古屋大学)

10:50 ~ 11:05

[15005] Couette乱流における共変Lyapunovベクトルの整列と動力学

*佐々木 英一[1]、河原 源太[2]、山田 道夫[3] (1. 秋田大学、2. 大阪大学、3. 京都大学)

11:05 ~ 11:20

[15006] 薄い球殻と単位球面上のナヴィエ・ストークス方程式の弱解に対する差分評価

*三浦 達彦[1] (1. 東京都立大学)

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

15:00 ~ 16:15 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (3)

座長：松本剛（京都大学）

15:00 ~ 15:15

[15007] f面放射対流平衡における熱帯低気圧形成のデータ駆動型モデリング

*神野 拓哉[1]、原 誠人[2]、三ツ井 孝仁[3]、齊木 吉隆[2]、米田 剛[2] (1. 富山大学、2. 一橋大学、3. 順天堂大学)

15:15 ~ 15:30

[15008] 情報を保存する乱流モデル：チャネル乱流への適用

*橋本 丈瑠[1]、塚原 隆裕[1]、荒木 亮[1] (1. 東京理科大学)

15:30 ~ 15:45

[15009] 波数空間における定流束状態を用いた乱流のアンサンブルモデル

*吉田 恭[1] (1. 筑波大学)

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

16:25 ~ 17:25 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (4)

座長：玉野真司（名古屋工業大学）

16:25 ~ 16:40

[15010] チャネル高分子流れにおける壁面せん断応力計測に関する研究

*浅岡 純平[1]、辻 義之[1] (1. 名古屋大学大学院工学研究科エネルギー理工学専攻)

16:40 ~ 16:55

[15011] 圧縮性等方乱流におけるショックレットの幾何学的解析

*櫻井 幹記[1]、立石 隼啓[2]、石原 卓[2] (1. 横浜国立大学、2. 岡山大学)

16:55 ~ 17:10

[15012] 非対称流路ネットワークでバクテリア集団運動のトポロジカルエッジ状態をデザインする

*内田 善人[1]、西口 大貴[2]、竹内 一将[1] (1. 東京大学、2. 東京科学大学)

17:10 ~ 17:25

[15013] 滑らかなオイラー流における渦輪の非線形スケール局所変形

*米田 剛[1] (1. 一橋大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-07：形態と機能の材料力学）

9:10 ~ 10:25 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-07 (1)

座長:永島 壮(名古屋大学)

9:10 ~ 9:25

[16001] 加法変分原理と乗法重み構造の自然な等価性

*髙梨 和光[1] (1. NPO法人環境防災コンシェルジェ)

9:25 ~ 9:40

[16002] Föppl–von Kármán 板理論と分子動力学法による回位を導入したグラフェンシートの形態解析

*石田 一真[1]、田中 展[2]、雷 霄雯[1]、藤居 俊之[1] (1. 東京科学大学、2. 兵庫県立大学)

9:40 ~ 9:55

[16003] 転位対に起因するカーボンナノチューブのらせん構造形成機構と力学特性の解析

*小屋根 淳平[1]、雷 霄雯[1]、松崎 健一郎[1]、藤居 俊之[1] (1. 東京科学大学)

9:55 ~ 10:10

[16004] フェーズフィールド・クリスタル法と分子動力学法によるらせん状カーボンナノチューブのモデル構築と力学特性解析

*雷 霄雯[1]、松崎 健一郎[1]、藤居 俊之[1]、高木 知弘[2] (1. 東京科学大学、2. 京都工芸繊維大学)

10:10 ~ 10:25

[16005] 有限変形奇弾性構成則の構築に向けた変形勾配の乗算分解に基づく超弾性モデル

*松原 成志朗[1]、志賀 美春[1]、中村 明莉[1]、寺田 賢二郎[1] (1. 東北大学)

特別セッション | 特別セッション（OS-07：形態と機能の材料力学）

10:35 ~ 11:50 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-07 (2)

座長:雷 霄雯(東京科学大学)

10:35 ~ 10:50

[16006] 薄膜リンクル平坦化現象における濡れ性と膜厚の影響

*上野 誠太[1]、永島 壮[1]、兒嶋 佑太[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

10:50 ~ 11:05

[16007] エラストマー上における銀ナノワイヤの座屈

*村田 瞭介[1]、永島 壮[1]、兒嶋 佑太[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

11:05 ~ 11:20

[16008] Sobolev学習MLPによるノンレシプロカルゲルのサロゲートモデルの構築と実装

*兒嶋 佑太[1]、余語 勇哉[1]、稲前 有人[1]、永島 壮[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

11:20 ~ 11:35

[16009] 情報幾何学を用いた高分子のアフィンネットワークモデルの変形過程の解析

*西川 皐太[1]、小林 舜典[1]、畝山 多加志[2]、垂水 竜一[1] (1. 大阪大学、2. 名古屋大学)

11:35 ~ 11:50

[16010] 力学的に等価な結晶欠陥配置の形態解析

*小林 舜典[1]、垂水 竜一[1] (1. 大阪大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-09：減衰性能と振動特性の評価）

15:00 ~ 16:00 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-09 (1)

座長:中村 尚弘(関西学院大学)

15:00 ~ 15:15

[16011] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その1　アンケート概要および耐震構造に関する結果

*犬伏 徹志[1]、佐武 直紀、近藤 貴士[2]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 近畿大学、2. 大和ハウス工業、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:15 ~ 15:30

[16012] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査
その2　制振構造に関する結果

*伊藤 真二[1]、犬伏 徹志[2]、佐武 直紀、近藤 貴士[1]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 大和ハウス工業、2. 近畿大学、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:30 ~ 15:45

[16013] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その3　免震構造に関する結果

*佐武 直紀、犬伏 徹志[1]、近藤 貴士[2]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 近畿大学、2. 大和ハウス工業、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:45 ~ 16:00

[16014] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その４　床振動の検討に関する結果

*近藤 貴士[1]、西井 康真[1]、犬伏 徹志[2]、佐武 直紀、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 大和ハウス工業、2. 近畿大学、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

特別セッション | 特別セッション（OS-09：減衰性能と振動特性の評価）

16:25 ~ 17:25 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-09 (2)

座長:犬伏 徹志(近畿大学)

16:25 ~ 16:40

[16015] 減衰モデルの歴史と最新の知見

*茂木 良宏[1]、中村 尚弘[2]、太田 成[3] (1. 大成建設株式会社、2. 関西学院大学、3. 構造計画研究所)

16:40 ~ 16:55

[16016] 生成AIによる建築物の減衰分野の最新情報の収集

*中村 尚弘[1] (1. 関西学院大学)

16:55 ~ 17:10

[16017] 観測加速度から変位波形を求める解析について

*犬飼 瑞郎[1] (1. 国立研究開発法人　建築研究所)

17:10 ~ 17:25

[16018] 伝達関数及び確率部分空間法を用いた床スラブの振動特性評価

*組原 理玖[1]、宮津 裕次[1]、髙橋 祐貴[1]、増田 圭司[2]、佐々木 康人[2]、大塚 友理[2] (1. 東京理科大学、2. 株式会社フジタ)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-02：逆問題の数理的手法の近年の進展）

2026年5月16日(土) 9:10 ~ 10:25 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-02 (1)

座長:藤原 宏志(京都大学)

9:10 ~ 9:25

[14001] 2次元定常輻射輸送方程式のエネルギー密度の最大値原理に対する上流差分スキームに基づく数値的反例

*野見山 晃成[1]、藤原 宏志[1] (1. 京都大学)

9:25 ~ 9:40

[14002] 帯状領域のLaplace方程式の Cauchy 問題に対するCarlemanの公式による数値的手法

*水盛 智哉[1]、藤原 宏志[1] (1. 京都大学)

9:40 ~ 9:55

[14003] Fictitious domain FEMおよび随伴変数法を用いた三次元熱源温度同定解析

*木村 和慎[1]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学)

9:55 ~ 10:10

[14004] 0.3 T MRIを用いた磁気共鳴エラストグラフィによるヒト肩を想定した測定条件の検討

*鈴木 慎也[1]、谷口 陽[2]、菅 幹生[1] (1. 千葉大学、2. 富士フイルム株式会社)

10:10 ~ 10:25

[14005] 深層学習による磁気共鳴エラストグラフィのための粘弾性率推定法

*野田 巽[1]、図師田 建[1]、藤原 宏志[2]、岸本 理和[3]、小畠 隆行[3]、菅 幹生[1] (1. 千葉大学、2. 京都大学、3. 量子科学技術開発機構)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

2次元定常輻射輸送方程式のエネルギー密度の最大値原理に対する上流差分スキームに基づく数値的反例

A Numerical Counterexample to the Maximum Principle for Fluence in the 2D Steady-State Radiative Transport Equation via Upwind Discretization

野見山　晃成（京大院 · 情報学）　　藤原　宏志（京大院 · 情報学）
Akira NOMIYAMA, Graduate School of Informatics, Kyoto University
Hiroshi FUZIWARA, Graduate School of Informatics, Kyoto University
E-mail: nomiyama.akira.54w@st.kyoto-u.ac.jp

In the numerical analysis and computation of the radiative transport equation (RTE), the discrete maximum principle (DMP) is an essential mathematical property. It is well known that an upwind difference scheme admits DMP for the radiance under appropriate conditions. In this study, we constructed a specific numerical counterexample indicating that the maximum principle does not hold for the fluence, even under conditions where DMP holds for the radiance. It also implies the invalidity of the conventionally used diffusion approximation.

1. はじめに

近年, 生体組織内部の構造や機能を非侵襲的に可視化・計測する技術として, 近赤外光を用いたイメージングや治療法が急速に発展している. 生体組織は光が散乱及び吸収による減衰を受ける媒質とみなせ, このような媒質中の光のエネルギー輸送を記述する数理モデルの一つに輻射輸送方程式（Radiative Transport Equation; RTE）がある. RTE は微分積分方程式であるため厳密解を構成するのは困難であり, 差分法や有限要素法を用いた数値解法が提案されている.[8),9)] このような数値解法において, スキームの基本的かつ重要な数学的性質の一つが, 離散最大値原理（Discrete Maximum Principle; DMP）である. DMP は, 数値解の非負性を通じて, 解の一意性や安定性を導く.

RTE における未知関数は, 位置と速度方向に依存する粒子密度である. 一方, 工学的 · 医学的な観点からは, 粒子密度を全立体角で積分した量であるエネルギー密度も重要である.[1)] しかしながら, 粒子密度に関して DMP が成立している状況下において, エネルギー密度についても対応する最大値原理が成立するか否かは, 特に生体内のような散乱が支配的な領域において筆者の知る限り明らかでなかった.

そこで本研究では, 生体内の光伝播を想定し, 散乱が支配的な媒質, および生体組織特有の前進性の強い散乱位相関数をモデルとして, 二次元矩形領域における定常 RTE の数値計算により, エネルギー密度の最大値原理を定量的に論じる. 具体的には, 上流差分スキームを用い, 粒子密度に対しては DMP が成立し数値的な信頼性が保証されている条件下であっても, その積分量であるエネルギー密度に対しては, 最大値原理が成立しない数値的反例を構成する.

この反例は，拡散近似[1)] と異なり，生体内部でのエネルギー密度が境界でのエネルギー密度換算値を上回る場合があることを示している．工学的・医学的には，密度計算において，境界条件のみに基づく評価が内部エネルギー密度の過小評価につながるという留意すべき状況の存在を意味するものである.

2. 輻射輸送方程式とエネルギー密度

本節では RTE の数値解法として採用する上流差分スキームとその信頼性について文献 4),6) に沿って述べる. これは, 次節で扱う数値計算結果が, 離散化誤差に起因するものではないことを理解する上で必要である. 最後に, 本研究で着目する積分量であるエネルギー密度を定式化する.

2.1. 輻射輸送方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界凸領域とし, その境界は区分的に滑らかとする. 位置 $x \in \Omega$ において速度 $\xi \in S^1$ をもつ粒子密度を $I(x,\xi)$ とおくと, I を未知関数とする定常 RTE の境界値問題は, 生体内に光源がないことを考慮して

$$\begin{aligned} \xi \cdot \nabla_x I + (\mu_s + \mu_a) I &= \mu_s \int_{S^1} p(x;\xi,\xi') I(x,\xi') d\sigma_{\xi'}, \quad \text{in } \Omega \times S^1, \\ I(x,\xi) &= I_0(x,\xi), \quad \text{on } \Gamma_-, \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる. ここで, $\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ であり, $d\sigma$ は S^1 の線素である. 係数 $\mu_s = \mu_s(x), \mu_a = \mu_a(x)$ はそれぞれ散乱係数, 吸収係数を表す. 積分核 $p(x;\xi,\xi')$ は散乱の位相関数とよばれ, 位置 $x \in \Omega$ における散乱で, 粒子の速度方向が ξ' から ξ に変化する条件付確率に対応する確率密度関数である. さらに本研究では p は ξ と ξ' のなす角 α に依存し, ξ, ξ' 各々の方向には依存しないものとする.[2)] このとき $p(x;\xi,\xi') = \tilde{p}(x;\alpha)$ と表すと, $\tilde{p}$ は α に関して $\mathbb{R}$ 上周期 2π の偶関数になる. 領域境界 $\partial\Omega$ 上の点 x における外向き単位法線ベクトルを $n(x)$ とするとき, 境界 Γ は $\Gamma_\pm = \{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^1 \mid n(x)$ が存在して $\pm n(x) \cdot \xi > 0\}$ と定められる. $I_0(x,\xi)$ は境界から流入する粒子密度を表す.

2.2. 上流差分スキーム

$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ とし, 正整数 N_1, N_2, N に対し, $\Delta x_i = L_i/N_i$, $\Delta\theta = 2\pi/N$ とする. このとき, $x_{ij} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2)$ と $\xi_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}) = \big(\cos(n\Delta\theta), \sin(n\Delta\theta)\big)$ をそれぞれ $\bar{\Omega}$, S^1 上に定め, $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の $I(x_{ij},\xi_n)$ 相当値を $I_{ij,n}$ と書く. このとき, (1) に対し角度方向に対する台形則および空間方向に対する一次精度上流差分法による離散化をおこない, 以下を得る.

$$\begin{aligned} (A_\Delta - \Sigma_\Delta + K_\Delta) I_{ij,n} &= 0, \quad (x_{ij},\xi_n) \in \Omega \times S^1, \\ I_{ij,n} &= I_0(x_{ij},\xi_n), \quad (x_{ij},\xi_n) \in \Gamma_-. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, $A_\Delta, \Sigma_\Delta, K_\Delta$ は以下を満たす $\{I_{ij,n}\}$ 上の作用素である.

$$\begin{aligned} A_\Delta I_{ij,n} &= -\xi_{n,1} \frac{I_{i+1,j,n} - I_{i-1,j,n}}{2\Delta x_1} + |\xi_{n,1}| \frac{I_{i+1,j,n} - 2I_{i,j,n} + I_{i-1,j,n}}{2\Delta x_1} \\ &\quad - \xi_{n,2} \frac{I_{i,j+1,n} - I_{i,j-1,n}}{2\Delta x_2} + |\xi_{n,2}| \frac{I_{i,j+1,n} - 2I_{i,j,n} + I_{i,j-1,n}}{2\Delta x_2}, \\ \Sigma_\Delta I_{ij,n} &= (\mu_s(x_{ij}) + \mu_a(x_{ij})) I_{ij,n}, \\ K_\Delta I_{ij,n} &= \mu_s(x_{ij}) \Delta\theta \sum_{\nu=0}^{N-1} p(x_{ij};\xi_n,\xi_\nu) I_{ij,\nu}. \end{aligned} \tag{3}$$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

本研究では $\mu_s(x)$ 及び $\mu_a(x)$ は Ω 上有界かつ非負で, $\mu_s(x) \not\equiv 0, \mu_a^- \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $0 < \mu_a^- \le \mu_a(x)$ であるとする. さらに, $I_0(x,\xi)$ は Γ_- 上有界で, $\tilde{p}(x;\alpha)$ は α において C^2 級で, $\tilde{p}'$ は α についての導関数とする. また, $\Delta\theta_0$ は以下を満たす正定数とする.

$$\Delta\theta_0 \left(\sup_{x\in\Omega} \tilde{p}(x;0) \right) \le 0, \quad \text{かつ} \quad \Delta\theta_0^2 \|\tilde{p}''\|_\infty < \frac{12}{\pi} \inf_{\mu_s(x)\neq 0} \frac{\mu_a(x)}{\mu_s(x)}. \tag{4}$$

これらの仮定の下で, $\Delta\theta \le \Delta\theta_0$ なら (2) の係数行列は狭義優対角であり, 離散問題 (2) の解 $\{I_{ij,n}\}$ が唯一存在する.[6] また, 粒子密度に関しては以下の DMP が成立する.[4]

定理 1: 離散最大値原理 4)

$\Delta\theta \le \Delta\theta_0$ とする. $\max\{I_{ij,n}; (\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\} > 0$ なら

$$\max\{I_{ij,n}; \Omega\times S^1\} < \max\{I_{ij,n}; \Gamma_-\} = \max\{I_{ij,n}; (\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\}$$

が成立する.

また, $\Delta\theta \le \Delta\theta_0$ かつ RTE の厳密解が十分滑らかなら, 数値解は厳密解に収束する.[4]

2.3. エネルギー密度

位置 $x \in \bar{\Omega}$ における粒子のエネルギー密度を $\Phi(x)$ と表す. $\Phi(x)$ は粒子密度 $I(x,\xi)$ を全立体角にわたって積分した量として定義される. 従って, 境界 $x \in \partial\Omega$ での粒子密度 $I(x,\xi)$ の値が問題となる. RTE 境界値問題 (2.1) の解 I に関して, I_0 が Γ_- で有界かつ連続であれば $\xi\cdot\nabla_x I$ は $\Omega\times S^1$ で有界であり, 従って I は Γ_+ まで延長できることが知られている.[3] この延長を再び I と書くことにすると, 内部点及び境界点での Φ は以下のように記述される.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{S^1} I(x,\xi)\, d\sigma_\xi, && x \in \Omega, \\ \Phi(x) &= \int_{\Gamma_{-,x}} I(x,\xi)\, d\sigma_\xi + \int_{\Gamma_{+,x}} I(x,\xi)\, d\sigma_\xi, && x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

ただし, ここで $x \in \partial\Omega$ に対し, $\Gamma_{\pm,x} = \{\xi \in S^1 \mid \pm n(x)\cdot\xi > 0\}$ である. 格子 $x_{ij} \in \bar{\Omega}$ 上の $\Phi(x_{ij})$ 相当値を Φ_{ij} と書く. このとき, (5) に対し台形則による離散化を行い, 以下を得る.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \Delta\theta \sum_{n=0}^{N-1} I_{ij,n}, && x_{ij} \in \Omega, \\ \Phi_{ij} &= \Delta\theta \sum_{n(x_{ij})\cdot\xi_n<0} I_{ij,n} + \Delta\theta \sum_{n(x_{i'j'})\cdot\xi_n>0} I_{i'j',n}, && x_{ij} \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで, $x_{i'j'}$ は $x_{ij} \in \partial\Omega$ の一つ内側の内部点, すなわち, $n(x_{ij}) = (n_{ij,1}, n_{ij,2})^T$ を境界点 $x_{ij} \in \partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとしたとき, $x_{i'j'} = x_{i-n_{ij,1},j-n_{ij,2}}$ と定義される, 境界点に隣接する内部格子点である.

3. 数値計算結果

$\Omega = (0,1)\times(0,1)$ とし, $\mu_s \equiv 1.09$, $\mu_a \equiv 0.08$ とする.[7] また, 散乱位相関数は Poisson 核

$$\tilde{p}(x;\alpha) = \tilde{p}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-g^2}{1-2g\cos\alpha+g^2} \tag{7}$$

を $g = 0.9$ として利用する. 領域 Ω が 3 次元の場合, 3 次元 Poisson 核は Henyey-Greenstein 核とよばれ, 生体内の近赤外光伝播に特有の強い前進性を表すために $0.75 \le g \le 0.95$ が広く用いられる.[5] このとき, $N_1 = N_2 = 200$, $N = 100$ として得られる (2) の数値解 $\{I_{ij,n}\}$ から (6) によって構成した $\{\Phi_{ij}\}$ の空間分布を Fig.1 に示す. ただし, 分割数及び係数は条件 (4) を満たすことに注意する. Fig.1 中の色は Φ_{ij} の $\bar{\Omega}$ 上の値を表しており, 暖色ほど値が大きく, 寒色ほど値が小さいことを示している. また, 図中の青い星印は領域中心を, 赤丸は領域内部での Φ_{ij} の最大値を与える点を, 赤い正方形は境界上での Φ_{ij} の最大値を与える点を示している. 以上の設定の下で, 境界上での最大値は $\max_{x_{ij}\in\partial\Omega}\Phi_{ij} \approx 1.2842$ であったのに対して, 領域中心での値は $\Phi_{\text{center}} \approx 1.9717$ であり, 有意に大きくなった. この結果は, $I_{ij,n}$ が DMP を満たす状況下であっても, その積分量である Φ_{ij} は領域内部で最大値をとり, Φ_{ij} について DMP が成立しないことを強く示唆している. 数値計算例の詳細は講演会当日に紹介する.

近赤外光の応用等において, 境界値から内部状態を評価することは重要であり, (離散) 最大値原理はその一つの指標を与える. 本研究で示した数値例をもとに応用上の観点からエネルギー密度に対して (離散) 最大値原理が成立するための条件の考察が今後望まれる.

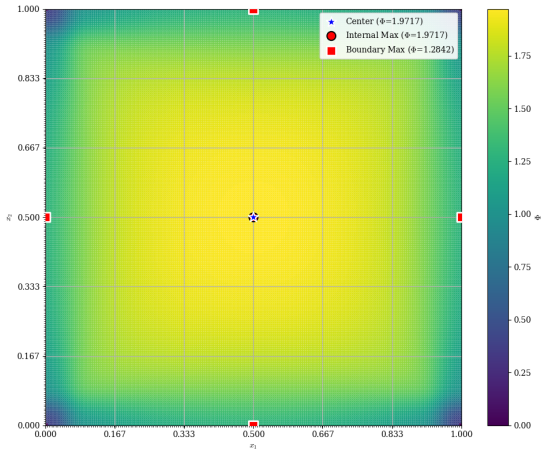


Fig. 1 Profiles of numerical solution Φ_{ij}.

謝辞：第 2 著者の研究の一部は JSPS 科研費 JP24K00539 の助成を受けたものである.

参考文献

1) S. R. Arridge, Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems* **15**, R41–R93 (1999).
2) S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* Dover (1960).
3) I.-K. Chen and D. Kawagoe, Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography, *Inverse Problems and Imaging* **13**(2), 337–351 (2019).
4) 藤原宏志, 生体内の光伝播の数値計算のための定常輻射輸送方程式の上流差分スキームの数値解析, 計算数理工学会レビュー **2017**(2), 21–32 (2017).
5) L. G. Henyey and J. L. Greenstein, Diffuse radiation in the galaxy, *Annales d' Astrophysique* **3**, 117–137 (1940).
6) N. Higashimori and H. Fujiwara, Stability and convergence of an upwind finite difference scheme for the radiative transport equation, arXiv:1303.6383v1 [math.NA] (2013).
7) Japan Science and Technology Agency (JST), A-STEP funding program, No. 2121313B (2011).
8) A. D. Klose, V. Ntziachristos, and A. H. Hielscher, The inverse problem based on the radiative transfer equation in optical molecular imaging, *J. Compt. Phys.* **202**, 323–345 (2005).
9) T. Tarvainen, V. Kolehmainen, S. R. Arridge, and J. P. Kaipio, Image reconstruction in diffuse optical tomography using the coupled radiative transport-diffusion model, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **112**(6), 2600–2608 (2011).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

帯状領域の Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する Carleman の公式による数値的手法

Numerical Reconstruction for the Cauchy Problem of the Laplace Equation in a Strip Domain Using the Carleman Formula

藤原　宏志（京都大学大学院 情報学研究科）　水盛　智哉（京都大学大学院 情報学研究科）
Hiroshi FUJIWARA, Kyoto University
Tomoya MIZUMORI, Kyoto University
E-mail: mizumori.tomoya.86h@st.kyoto-u.ac.jp

In this study, we investigate a numerical reconstruction method based on the Carleman formulae for the initial value problem of the Laplace equation in a strip domain. The initial value problem for the Laplace equation is ill-posed in the sense of Hadamard, and instabililty is the central concern on numerical computation. To overcome this difficulty, we introduce a Calreman-type formula using the weight function $\varphi(z) = e^z$. Numerical experiments are conducted to demonstrate the feasibility of numerical computation with an appropriate parameter choice.

1. はじめに

Laplace 方程式の境界値問題は物理学や工学において基本的であるが, Cauchy データから領域内部の解を求める初期値問題は多くの逆問題の数理モデルとして現れ, Hadamard の意味で非適切 (ill-posed) な問題として知られている.[1),2)] ここで, 問題の解が唯一つ存在し, 附帯データに連続的に依存するという 3 つの条件を全て満たすとき, その位相で問題は Hadamard の意味で適切 (well-posed) という. 適切性の否定概念が非適切性であり, 特に数値計算では, 自然な函数空間において不安定であることが問題となり, 例えば丸め誤差程度の微小な誤差でも計算過程で急速に増大するため, 差分法等の標準的な解法を直接適用する数値計算は破綻することが知られており, 正則化法を援用する手法などが提案されている.[3)] 一方, 正則化法では正則化パラメータの定量的な設定方法[4)] の信頼性についての議論は少なく, また元の方程式を近似することで正則化された方程式や解の性質が変わり, 本来逆問題として知りたい特異性や不連続性を直接的に捉えることが困難となる.

本研究では, 非適切問題の典型的な例として,2 次元帯状領域における Laplace 方程式の初期値問題を対象とし, Carleman の公式[5)] に基づき, 正則化法を明示的に適用しないという意味で直接的な数値計算手法を検討する. Carleman の公式は正則函数に対する Cauchy の積分公式に基づく手法であり, 2 次元に限られるものの, 適当な重み函数と条件のもとで領域内の任意の点の値を境界積分の極限値として与える. 幾つかの数値実験を通して, 数値計算の実現可能性を論じる.

2. 数値的不安定性と差分法の適用例

帯状領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ において, n を正整数として Hadamard の反例を考えると,

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} e^{n(1-x)} \sin(ny)$$

はこの初期値問題を満たしている. これに対して境界 $x = 1$ 上のノルムは $n \to \infty$ のとき,

$$\|u_n(1, \cdot)\|_\infty = \frac{1}{n^2} \to 0,$$
$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x}(1, \cdot) \right\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$$

であるが, 任意の $0 < x < 1$ に対して内部の挙動は

$$\|u_n(x, \cdot)\|_\infty = \frac{1}{n^2} e^{n(1-x)} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となる. 問題の線型性から,$x = 1$ 上で Cauchy データ $u(1, y)$ および $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, y)$ が与えられている初期値問題に対しては, 適当な位相でこの問題が不安定であることがわかる.

実際,$u(1, y) = \dfrac{2}{4 + y^2}$ および $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \dfrac{y^2 - 4}{(4 + y^2)^2}$ としたとき, 標準的な差分法で格子幅を $\Delta x = \Delta y = 0.01$ とした場合の数値計算結果を Fig. 1 に示す. $x = 1$ の近傍で厳密解と差分法による数値解は良好な一致を示すものの, $x = 1$ から離れるに従い誤差が急激に増大し, 数値計算が破綻している.

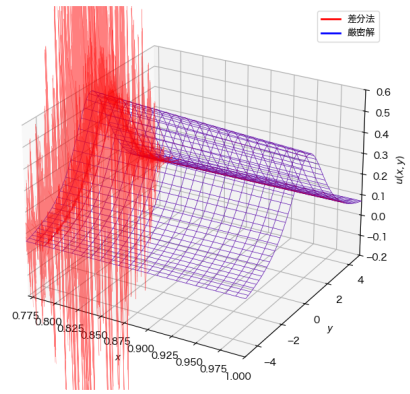


Fig. 1　Numerical solutions by the finite difference method.

3. Carleman 型公式とその離散化

以下では $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する. $D \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界をもつ領域とし, $M \subset \partial D$ は連結かつ正の測度をもつとする. このとき,D の近傍で正則な f と $z \in D$ に対して, Goluzin-Krylov による次の Calreman 型の公式が成立する:[5)]

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)} \right)^m \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

ここで φ は D の近傍で正則かつ有界であり, $\partial D \setminus M$ 上で $|\varphi| = 1$,D 上で $|\varphi(z)| > 1$ を満たす重み函数である.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

本研究では帯状領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ に対し, $\varphi(z) = e^z$ を採用する. ここで, 与えられた Cauchy データに対して Cauchy-Riemann 方程式を満たすように境界上の虚部を $v(1,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(1,\eta)d\eta$ と定め, これを境界値とする D での共役調和函数 $v(x,y)$ を考えれば,$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ は D で正則であり, (1) が成立する.

数値計算のため,(1) に現れる極限および積分を近似し, m と N を正の整数,T を正の数として離散化を行う. 積分変数 ζ を $\zeta = 1 + iy$ とおき, 積分区間を $(-T,T)$ で打ち切る. さらに区間を N 個の点に分割し, 刻み幅 $\Delta y = 2T/(N-1)$, 分点 $y_j = -T + j\Delta y$ $(j = 0,\ldots,N-1)$ として長方形則（区分求積法）を適用すると, 次式を得る.

$$f(z) \approx \frac{\Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} f(1+iy_j) e^{m(1+iy_j-z)} \frac{1}{1+iy_j-z} \qquad (2)$$

この $f(z)$ の実部をとることで, 求める $u(x,y)$ の近似値を得ることが期待される.

4. 数値実験結果

前述の $u(1,y) = \frac{2}{4+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \frac{y^2-4}{(4+y^2)^2}$ に対して提案する Carleman 公式による数値的再構成を行った.

まず, $T = 10$,$m = 1$ とし分割数 N を増やすと, 厳密解に近づく傾向が見られたが,$N \geq 1000$ では精度の向上は飽和した. これは離散化誤差よりも他の要因（打ち切り誤差等）が支配的になるためと考えられる. そこで以下では T を変化させる際に $N = 1000$ と設定する.

次に $m = 5$ とし, 積分区間 $(-T,T)$ の幅を広げると, 本来の $x = 1$ 上の積分に近づくため, 再構成精度は向上した. $T = 2, 10$ での比較を図 2 に示す.

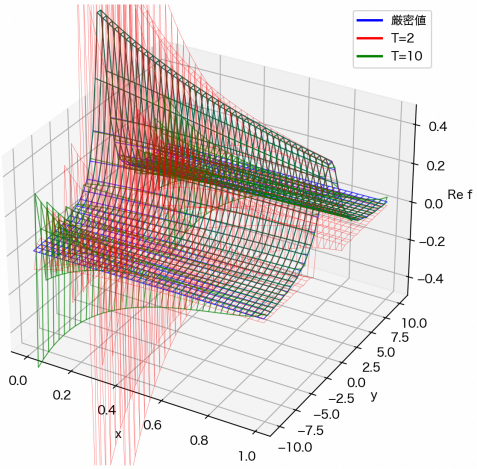


Fig. 2 Comparison of numerical reconstruction results with different truncation widths $T = 2$(red) and $T = 10$(green).

さらに $T = 10$ として重みパラメータ m を大きくすると, 計算結果は厳密解に近づくことが確認された.$m = 1, m = 5$ での比較を図 3 に示す.

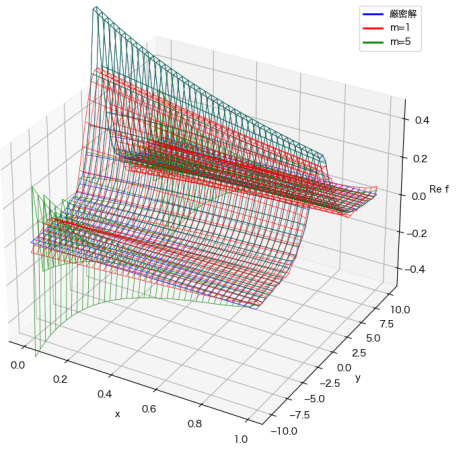


Fig. 3 Comparison of numerical reconstruction results with different exponential weights $m = 1$(red) and $m = 5$(green).

5. 結論

本研究では, 帯状領域の Laplace 方程式の初期値問題に対し,Carleman 型公式を用いた数値計算法を提案し, 数値実験により数値計算の実現可能性を論じた. 差分法では解が発散する状況でも, 本手法ではパラメータ m,T を適切に選ぶことで不安定な問題の数値計算に現れる極端な数値解の振動による破綻はみられず, 適当な範囲で数値的再構成が可能であることを確認した.

謝辞: 第 1 著者の研究の一部は JSPS 科研費 JP24K00539 の助成を受けた.

参考文献

1) J. Hadamard: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, 1923.
2) 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌宏: 逆問題の数理と解法, 東京大学出版会, 1999.
3) R. Chapko and B. T. Johansson, *Boundary-Integral Approach to the Numerical Solution of the Cauchy Problem for the Laplace Equation*, Ukrainan Mathematical Journal **68** (2017) pp. 1929–1948.
4) P. C. Hansen: *Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve*, SIAM Review **34** (1992) pp. 561–580.
5) L. Aizenberg: *Carleman's Formulas in Complex Analysis*, Springer, 1993.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Fictitious domain FEM および随伴変数法を用いた三次元熱源温度同定解析
Three-dimensional heat source temperature identification using the fictitious domain finite element and adjoint variable methods

木村　和慎（長岡技科大・工）　　上林　恵太（長岡技科大・工）　　倉橋　貴彦（長岡技科大・工）
Kazuma KIMURA, Graduate School of Nagaoka University of Technology
Keita KAMBAYASHI, Nagaoka University of Technology
Takahiko KURAHASHI, Nagaoka University of Technology
E-mail: s233029@stn.nagaokaut.ac.jp

Heat generation occurs in many engineering systems, and identifying the temperature of heat sources is essential for effective thermal management. In many practical situations, however, heat sources are shielded from external access or involve motion, which makes direct temperature measurement difficult. In our previous study, we proposed a numerical method to identify heat source temperatures from temperature data obtained in observable regions surrounding the heat source. The proposed method combines the fictitious domain finite element method with the adjoint variable method, and its effectiveness has been demonstrated for both stationary and moving heat sources. Nevertheless, the previous validation was limited to two-dimensional domains, whereas practical industrial applications require consideration of three-dimensional temperature distributions. In this study, we extend the proposed method to three-dimensional temperature fields and conduct numerical experiments using a simplified computational model. The results demonstrate that accurate identification of three-dimensional heat source temperatures can be successfully achieved. These findings provide fundamental insights toward the practical implementation of three-dimensional heat source temperature identification analysis.

１．はじめに

多くの工学システムにおいて発熱は早期故障や性能劣化の原因となる [1]．そのため，効果的な対策を講じるには熱源温度の正確な同定が不可欠である．しかし実際には，熱源が装置内部に存在する場合や運動を伴う場合が多く，温度センサを熱源に直接設置して計測することは困難である．そこで，非接触温度計測手法や機械学習を用いた温度推定手法が提案されている．しかし，サーモグラフィカメラに代表される光計測技術による非接触計測では，周囲からの放射や測定機器周辺温度などの影響を受けやすいことが問題である [2]．また，機械学習を用いた推定手法では，未学習条件への適用が難しいという問題がある [3]．これらの手法に対し，数値計算に基づく逆解析は物理法則との整合性を保ちつつ，多様な観測条件や熱源挙動に幅広く対応可能な有力なアプローチである．

そこで著者らは先行研究 [4]において，Fictitious domain FEM[5]および随伴変数法に基づく熱源温度同定解析手法を提案した．本手法は，熱源が静止している場合と運動している場合のいずれにおいても，同一の枠組みで熱源温度の同定解析を行うことが可能である．しかし既往研究は二次元領域の解析に限定されており，産業応用を見据えると三次元温度場への拡張が不可欠である．また，三次元化に伴い，熱源と観測点の位置関係が複雑化することや，Fictitious domain FEM における幾何情報の取り扱いが同定精度に与える影響は未解明である．そのため，二次元解析で得られた知見が三次元解析においても同等とは限らず，三次元解析における数値特性を調査する必要がある．

本研究では，提案手法を三次元温度場へ拡張し，単純な計算モデルを用いた数値実験により，三次元温度場における提案手法の有効性を検証することを目的とする．

２．定式化

本研究では，三次元温度場を想定し，計算領域およびその境界をそれぞれΩ，Γとし，物体領域をωとする．また，計算領域を表すメッシュを背景メッシュ，物体領域を表すメッシュを前景メッシュと呼ぶ．また，式(1)に示す三次元非定常熱伝導方程式を支配方程式とする．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \kappa\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = 0 \ \text{in}\ \Omega, t \in \left[t_0, t_f\right] \tag{1}$$

ここで，ϕは温度，κは熱拡散率を示す．また，境界Γにおける境界条件は式(2)に示す．

$$-\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = q \ \text{ on}\ \Gamma, t \in \left[t_0, t_f\right] \tag{2}$$

ここで，qは熱流束を示し，$q = 0\ \mathrm{W/m^2}$と定義する境界は断熱境界条件と呼ばれる．また，熱源物体領域においては，領域内の温度を既知として式(3)を与える．

$$\phi = \hat{g}\ \text{in}\ \omega, t \in \left[t_0, t_f\right] \tag{3}$$

ここで，gは熱源の温度を示す．Fictitious domain FEM では，式(3)の制約をラグランジュの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$により支配方程式に反映し，両辺に重み関数を乗じることで，重み付き残差方程式を得る．得られた方程式に対し，Galerkin 法に基づく有限要素離散化を行う．背景メッシュには四面体一次要素を用い，前景メッシュには選点法を適用することで，次の熱伝導問題における有限要素方程式が得られる．

$$\mathbf{M}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} - \kappa \mathbf{H}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{f} \ \text{in}\ \Omega, t \in \left[t_0, t_f\right] \tag{4}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{g} \ \text{in}\ \omega, t \in \left[t_0, t_f\right] \tag{5}$$

次に熱源温度同定問題の定式化を示す．本研究では，観測点における事前に与えた温度と熱伝導解析により得られた計算温度の差を最小化するように，熱源物体の温度gを決定する．そのため，評価関数は次式で定義する．

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_{obs})^{\mathrm{T}} \mathbf{R} (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_{obs})\, dt \tag{6}$$

ここで，ϕ_{obs}は観測温度を表す．また，$\mathbf{R}$は重み対角行列を表し，観測点における誤差のみを評価することを意味する．導出した熱伝導問題における有限要素方程式を制約条件として，随伴変数法を適用することで，随伴方程式およびその条件式，熱源温度を更新するための感度勾配が導出される．熱源温度の更新には最急降下法を用いる．二次元温度

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

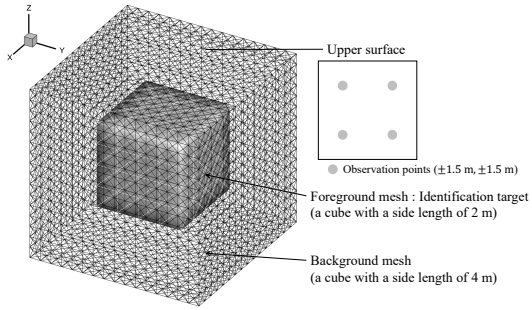


Fig. 1 Three-dimensional Computational model.

Tab. 1 Computational parameters.

Number of nodes in background mesh	22065
Number of elements in background mesh	98304
Number of nodes in foreground mesh	429
Number of elements in foreground mesh	1536
Thermal diffusivity κ, m^2/s	1.0
Time increment Δt, s	0.1
Time step	100
Initial step length α	10
Initial temperature in Ω, ℃	25.0
Convergence criterion ε	10^{-6}

場における詳細な定式化および計算手順については参考文献 [4]に示されている．本研究ではその枠組みを三次元へ拡張し，同様の手順に基づいて定式化を行う．

3. 数値解析例

本研究における三次元計算モデルを図 1 に示す．座標系の原点は計算領域の中心に設定し，計算領域は幾何学的対称性を有するものとした．なお，熱源の中心は計算領域の中心と一致している．各表面には断熱境界条件を与え，上表面に 4 点の温度観測点を配置した．観測温度は，熱源温度を既知の正解値とした順解析（熱伝導解析）により生成したノイズの無い理想的な数値データを用いた．計算に用いた物性値および解析条件は表 1 に示す．

逆解析によって同定された熱源温度の時間履歴を図 2 に，観測点のうち代表 1 点の時間履歴を図 3 に示す. 図 2 より，終端時刻近傍では終端条件の影響により同定結果に振動が確認されるものの，全体として真値である100 ℃を良好に再現していることがわかる．さらに，図 3 より観測点の温度についても良好な一致が確認できる．以上より，三次元化に伴う観測情報の変化があるにもかかわらず，本手法が安定した同定精度を維持できることが示された．

4. おわりに

本研究では，Fictitious domain FEM および随伴変数法に基づく熱源温度同定解析手法を三次元温度場へ拡張し，熱源温度の同定可能性について検証した．その結果，三次元温度場においても安定かつ良好な同定が可能であることを確認し，本手法の三次元場への適用可能性を示した．今後は，先行研究で提案した終端時刻における手法 [4]の適用や運動する熱源を対象とした数値実験，三次元場を再現した実証実験を通じて，本手法の妥当性および産業実装に向けた有効性の検証を進める．

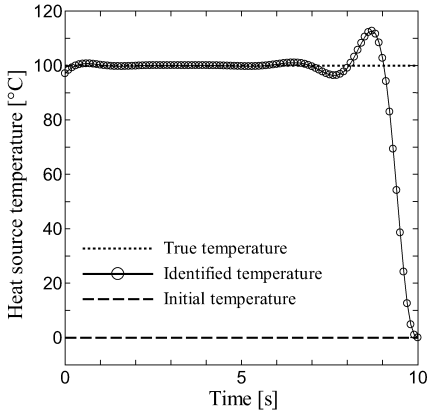


Fig. 2 Time history of the identified heat source temperature.

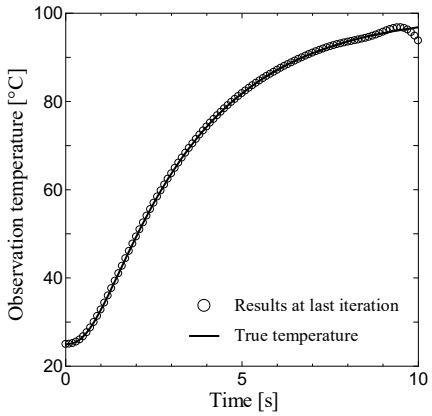


Fig. 3 Time history of the temperature at observation point.

謝辞

本研究を実施するにあたり, 公益財団法人 昭特科学振興財団からの研究助成を受けた．ここに記して謝意を表す.

参考文献

1) A. R. Dhumal, A. P. Kulkarni and N. H. Ambhore: A comprehensive review on thermal management of electronic devices, Journal of Engineering and Applied Science, 70, 140, 2023.
2) M. Vellvehi, X. Perpiñà, G. L. Lauro, F. Perillo and X. Jordà: Irradiance-based emissivity correction in infrared thermography for electronic applications, Review of Scientific Instruments, 82, 11, pp. 114901, 2011.
3) H. R. Tamaddon-Jahromi, N. K. Chakshu, I. Sazonov, L. M. Evans, H. Thomas and P. Nithiarasu: Data-driven inverse modelling through neural network (deep learning) and computational heat transfer, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 369, pp. 113217, 2020.
4) 木村和慎，上林恵太，倉橋貴彦:仮想領域有限要素法および随伴変数法に基づく熱伝導問題に対する逆解析における終端条件に関する検討, 計算数理工学論文集, 25, pp.59-70, 2025.
5) R. Glowinski, T.-W. Pan, and J. Periaux: A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 111, 3–4, pp. 283-303, 1994.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

0.3 T MRI を用いたエラストグラフィによるヒト肩を想定した測定条件の検討

Investigation of Measurement Conditions for Magnetic Resonance Elastography of the Human Shoulder Using a 0.3 T MRI

鈴木　慎也（千葉大）　　谷口　陽（富士フイルム）　　菅　幹生（千葉大）
Shinya Suzuki, Chiba University
Yo Taniguchi, FUJIFILM Corporation
Mikio Suga, Chiba University
E-mail: 22t0845w@student.gs.chiba-u.jp

Evaluating supraspinatus muscle stiffness is crucial for planning rotator cuff surgery. However, palpation is challenging because the muscle is located deep beneath the trapezius. While Magnetic Resonance Elastography (MRE) non-invasively quantifies internal tissue stiffness, systems optimized for the supraspinatus remain unestablished. This study investigated optimal receiver coil and driver placements for MRE using a 0.3 T MRI. We evaluated various configurations using a joint coil and a phantom mimicking periscapular bone structures. Results showed that positioning the driver superior to the shoulder maximized the Amplitude-to-Noise Ratio (ANR), which is essential for accurate elasticity mapping.

１．はじめに

生体組織は疾病や機能障害により弾性率が変化することが知られている．スポーツや仕事，加齢による肩の痛みや障害の一般的な原因として棘上筋，棘下筋，小円筋，肩甲下筋の 4 つの筋肉から構成される回旋筋腱板の断裂がある．回旋筋腱板の中でも，棘上筋の損傷が最も生じやすいことが報告されている．棘上筋の損傷があると，腱が徐々に体の中心に向かって引き戻される．また，腱の損傷に伴い，筋肉の萎縮や脂肪浸潤が起こり回旋腱板の筋肉の伸展性が低下する．筋肉にこれらの変化が生じると，損傷した棘上筋を修復するためには大きな引張力が必要になる．筋肉が萎縮し，脂肪が浸潤することで，腱の修復が難しくなり，過度のストレスがかかると再損傷を引き起こす可能性が高くなる．棘上筋の損傷の治療方法としてリハビリテーションや薬物療法といった保存的治療があるが効果を示さない場合，手術による修復となる．これらの理由から，棘上筋の弾性を予測することは手術治療の計画において重要な要素となる．剛性を把握することで，手術の成功率を高め，再損傷のリスクを低減するための適切なアプローチを選択することが可能になる [1]．

筋の弾性評価には超音波エラストグラフィが用いられることもあるが，肩関節周囲では骨による音響陰影や測定深度の制限のために棘上筋全体の評価には限界がある [2]．磁気共鳴画像装置(magnetic resonance imaging: MRI)により生体内部の粘弾性率を非侵襲的かつ定量的に画像化する手法として磁気共鳴エラストグラフィ(magnetic resonance elastography: MRE) がある[3]．MRE は深部筋を含む広範囲の組織を対象に，高い定量性と再現性で粘弾性率を評価できる．現在，棘上筋 MRE の報告は極めて少なく，棘上筋 MRE における受信コイルや振動子およびその配置位置の検討は十分ではない．本研究では，様々な肢位で測定可能なオープン型 MRI を用いたエラストグラフィでのヒト肩を想定した粘弾性率測定に適した外部振動子の配置と弾性率推定精度を検討することを目的とした．

２．実験方法

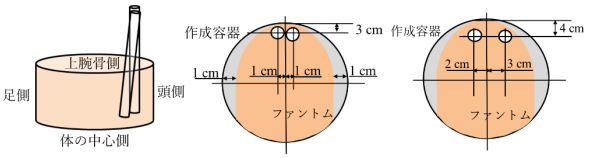
測定には，0.3 T オープン MRI（FUJIFILM）と図 1 に示した棘上筋周辺の骨を想定してアクリル棒を埋め込んだポリアクリルアミドゲルファントムを用いた．筋肉を想定したゲルの貯蔵弾性率（G’）は 7.3 kPa，損失弾性率（G”）は 1.8 kPa とした．各測定において共通する MRE の測定パラメータを表 1 に示す．関節部用コイルは肩の上に，振動子は肩の上もしくは前に配置することを想定して図 2 に示した 2 種類の配置で撮像した．

撮像データから弾性波画像を作成し，計測ノイズを低減するための前処理として 3 次元空間周波数フィルタを適用した．このフィルタは弾性波画像に対し，3 次元フーリエ変換により 3 次元周波数空間に変換した上で，弾性波の周波数帯域のみを通す 3 次元的なバンドパスフィルタである．本研究で使用した共通する MRE の測定パラメータおよび周波数フィルタのパラメータを表 1 に示す．前処理後の弾性波画像に対して非等方積分型解析手法（A-ITRF）[3]を適用して粘弾性率分布画像を算出した．

表1　MRE 測定パラメータ

シーケンス	GRE-MRE
FOV [mm×mm]	192×192
Matrix	64×64
スライス厚 [mm]	3
スライス枚数	15
Phase-encoding 方向	R>>L
動き検出傾斜磁場（MEG）周波数 [Hz]	60
TR/TE [ms]	500/27
加振電圧 [Vpp]	1.1
加振周波数[Hz]	60
スピーカー	Classic Pro CSX212SP
弾性率帯域[kPa]	1~10
フィルタ帯域[1/pixel]	3.64~11.52
低・高波数の標準偏差	1, 6
テスト函数サイズ	4

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会



(a) 全体像　　(b) 上腕骨側の面　　(c) 体の中心側の面

図 1 棘上筋周辺を想定したファントムの模式図



(a) 肩の上から加振を想定　　(b) 肩の前から加振を想定

図 2 ファントムに対する受信コイルと振動子の配置

3．評価方法

弾性波画像の振幅に対する背景ノイズの標準偏差の比を振幅対雑音比(amplitude-to-noise ratio: ANR)とし，式(1)で定義する．

$$\mathrm{ANR} = \frac{\text{弾性波の振幅[rad]}}{\text{加振無し弾性波画像の注目領域内標準偏差値[rad]}} \quad (1)$$

ANR は，背景ノイズが一定であれば振幅が大きいほど高く，粘弾性率推定精度は ANR が高いほど高くなる傾向がある．

関心領域（region of interest: ROI）は，棘上筋の位置を想定して図 3 に示した場所に設定した．

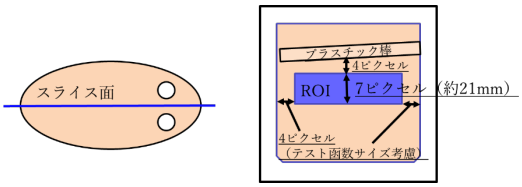


図 3 棘上筋を想定した関心領域

4．実験結果・考察

振動子配置ごとの Magnitude 画像および弾性波画像を図 4 に示す．MEGx, y, z は，それぞれ画像の左右，上下，断面の方向に MEG を印加したときの弾性波画像である．

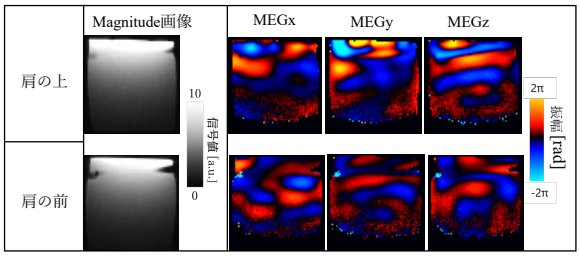


図 4 振動子配置ごとの Magnitude 画像と弾性波画像

振動子の配置によらず図 4 に示した弾性波画像において，アクリル棒を配置した付近で波が等間隔に伝播しなかった．これは，アクリル棒の存在により，弾性波の回折と干渉が生じたことが原因と考えられる．また，加振装置からの振動によりアクリル棒が振動していた場合には，アクリル棒も加振源となり，より複雑な干渉波が伝播することになった可能性もある．

貯蔵弾性率画像および振幅マップ，振幅対ノイズ比（amplitude to noise ratio: ANR）の結果を図 5 に示す．

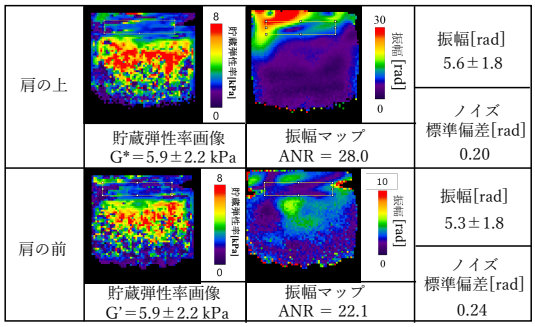


図 5 振動子配置ごとの弾性率画像と振幅マップ，ANR

振動子の配置によらず図 4 に示した弾性波画像において，アクリル棒を配置した付近で波が等間隔に伝播しなかった．これは，アクリル棒の存在により，弾性波の回折と干渉が生じたことが原因と考えられる．また，加振装置からの振動によりアクリル棒が振動していた場合には，アクリル棒も加振源となり，より複雑な干渉波が伝播することになった可能性もある．

ヘッドコイルを用いることで高い ANR となる環境下で求めたファントム均一領域での貯蔵・損失弾性率と比較して，棘上筋の位置を想定した ROI では貯蔵弾性率の値が低く推定された．これは，A-ITRF のテスト函数の範囲にアクリル棒が存在することが原因であると考えられる．一般的なアクリル材料は骨と同様に水分含有量が低く，また分子運動が制限されているため T_2 緩和時間が極めて短い．その結果，通常の MRI 撮像条件ではアクリル材料からの MR 信号がほとんど検出されず，画像上では無信号領域として描出される．そのためテスト函数の範囲にデータ欠損が生じることにより粘弾性率推定に誤差が生じやすくなると考えられる．したがって，ヒトを対象として棘上筋の粘弾性率推定においても，テスト函数の範囲に骨が存在する場合の例外処理などの工夫が必要になると考えられる．

関節部用コイルと四角型振動子を用いた撮像における 2 種類の配置においてファントムの側面から加振する配置の方が ROI での ANR が高く，貯蔵・損失弾性率推定精度も高くなった．以上の結果より，棘上筋の粘弾性率推定には肩の上から加振する配置が良いと考えられる．

5．まとめ

棘上筋周辺の骨を想定したゲルファントムを用いた MRE 実験により，関節部用コイルと加振装置を肩の上に配置する条件によって，棘上筋領域での ANR と弾性率推定精度が高くなることを明らかにした．しかし，棘上筋周辺では骨による影響により棘上筋の粘弾性率推定値は過小評価されることが示唆された．

粘弾性率の推定精度向上のための解析手法の改良は今後の課題である．また，棘上筋は 2 つの筋線維束に分かれており，加振方向により振動の伝播の仕方が異なる．棘上筋の筋線維も含め，本研究で考慮した骨以外の周辺組織も測定に影響する可能性がある．これらの検討を進め，棘上筋の粘弾性推定精度を向上することができれば，治療方針の決定や再損傷のリスク予測等に貢献できると考えられる．

参考文献

1) R.Muthpillai, et al., SCIENCE, 269: 1854-1857, 1995
2) Koga A，et al.，Magnetic Resonance Imaging 2021;80:9-13
3) T. Takeda, et al., IJCARS, 16 (11): 1947-1956, 2021

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

深層学習による磁気共鳴エラストグラフィのための粘弾性率推定法
Viscoelastic Modulus Estimation for Magnetic Resonance Elastography Using Generative Adversarial Network

野田 巽，図師田　建（千葉大），藤原　宏志（京都大）
岸本　理和，小畠　隆行（量研機構），菅　幹生（千葉大）
Tatsumi Noda, Tatsuru Zushizen (Chiba University), Hiroshi Fujiwara (Kyoto University),
Riwa Kisimoto, Takayuki Obata (QST), Mikio Suga (Chiba University)
E-mail: 23tb4031@student.gs.chiba-u.jp

We developed a deep learning method using Physics-Informed Neural Networks (PINNs) to estimate viscoelasticity in MRE. Unlike prior approaches, our method incorporates the wave equation into the loss function. Experiments on 3D simulations showed PINNs match the accuracy of previous analytical methods while improving boundary resolution, enabling precise non-invasive tissue characterization.

1．はじめに

生体内の粘弾性特性を非侵襲的かつ定量的に測定する手法として magnetic resonance elastography (MRE)がある[1]．MRE は，外部加振装置を用いて生体内部に正弦波振動を伝播させ，MRE 用パルスシーケンスにより弾性波画像を取得する．弾性波の変位分布と粘弾性の関係を用いた推定手法を適用することで，粘弾性率分布を推定する．粘弾性推定手法には，波動方程式を用いた解析的手法など様々なものが開発されており，本研究室では，2 次元弾性波画像を対象とした深層学習による手法を開発している[2]．しかし，一様な弾性率分布を持つファントムの検討にとどまっており，不均一な粘弾性分布や実測データへの適用については検討されていない．

本研究では，(1) 不均一な対象に対する推定法，(2) 物理制約付き深層学習(physics-informed neural networks: PINNs)[3]を用いた推定法の 2 つの手法を開発することを目的とした．

2．3 次元弾性波のシミュレーション手法

有限要素法により偏微分方程式を求解できるソフトウェアである FreeFEM[4]を用いて，3 次元弾性波シミュレーションを実施した．柱形状のファントムを四面体メッシュで離散化し，粘弾性係数と密度を設定した．

円柱上面から振動を加え，粘弾性波動方程式を数値的に解くことで変位分布を計算し，横波伝播方向に平行な断面における初期位相が 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$　radian の 4 枚の弾性波画像を抽出した(Fig. 1)．データセットの多様性を確保するため，球状領域のサイズ，位置，および領域内外の粘弾性を変化させた．メッシュ分割数は計算精度と計算時間のバランスを考慮して設定した．

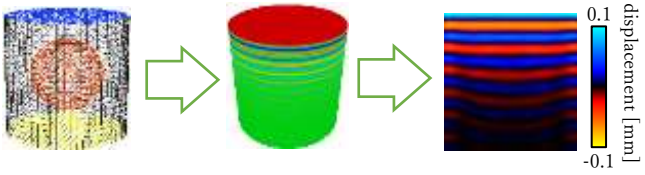


Fig. 1 Acquisition of Elastic Wave Images via Numerical Simulation

目的に沿ったデータセットを作成することで，弾性波画像から貯蔵弾性率および損失弾性率の分布を直接推定することが可能となる．

3．解析手法

3.1 不均一な対象に対応可能な elastoGAN

深層学習による粘弾性率推定手法として GAN 構造に基づく学習モデルを構築した(Fig. 2)．初期位相が異なる 4 枚の弾性波画像を入力データとし，対応する弾性率分布への変換に関する多種多様な処理を学習する学習モデルとした．提案手法の Generator は，前処理と粘弾性率推定の 2 つで構成した．前処理では，縦波や直流成分，ノイズ等の除去を目的として，3×3 と 5×5 の Gaussian または CNN のフィルタを設定した．変換器には HR-Net を採用した．数値シミュレーションデータで学習し，訓練時に含まれない粘弾性パラメータおよび内包物形状を持つ検証データで評価した．

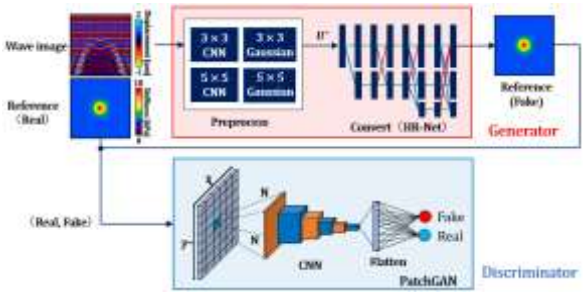


Fig. 2　elastoGAN training model

3.2 PINNs を用いた手法

提案手法は，画像変換を行う U-Net と物理制約を組み合わせた構造とした．初期位相が異なる 4 枚の弾性波画像を入力とし，U-Net を用いて空間情報を保持しながら貯蔵弾性率 G' と損失弾性率 G'' を出力する．

物理制約として，粘弾性方程式を損失関数に導入した．物理損失の重みを調整することで，データ適合性と物理的妥当性を両立した学習を可能とした(Fig. 3)．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

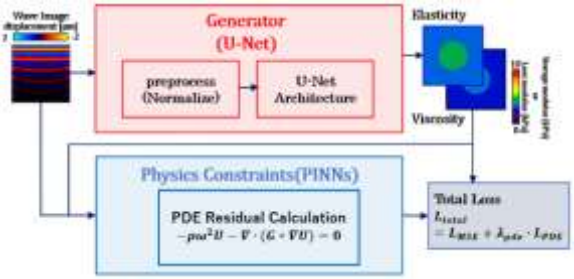


Fig. 3 Deep learning models with physical constraints

4．実験方法

境界部分における粘弾性分布を正確に推定するため，円柱ファントムの中央に病変部を想定した球状ファントムを配置した．シミュレーションでは 256×256 pixel の弾性波画像を生成し，128×128 pixel の領域をランダムに抽出することでデータセットを作成した．

深層学習における推定では，256×256 pixel の画像に対し，128×128 pixel の領域を 1 pixel ずつ移動させながら 16,641 通りの推定をした．各画素について重複する推定値の平均を算出することで最終結果を得た．同一の画像を用いて既存手法である A-ITRF[5]との比較をした．

評価用の弾性波画像と貯蔵弾性率および損失弾性率画像の例を Fig. 4 に示す．各手法の推定結果について，画像中央の内側 200pixel 四方の関心領域内における推定精度を平均絶対誤差率（MAPE，式 1）と二乗平均平方根誤差（RMSE，式 2）で評価した．y_iを真値，$\hat{y}_i$を各画素値の推定値とする．

$$MAPE\ [\%] = \frac{1}{N}\sum_i^N \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{G_T} \times 100 \qquad (1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i^N (y_i - \hat{y}_i)^2} \qquad (2)$$

また，エッジ再現性を画像中央のプロファイルで比較した．評価用の画像は訓練用のデータセットに含まれない貯蔵弾性率および損失弾性率の組み合わせ，ならびに内包物の半径とした．

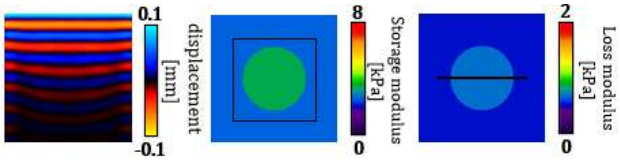


Fig. 4 Examples of shear wave images and storage and loss modulus images

5．結果・考察

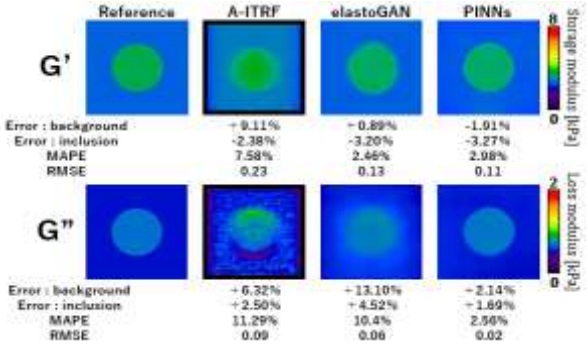


Fig. 5 Estimated viscoelastic modulus image

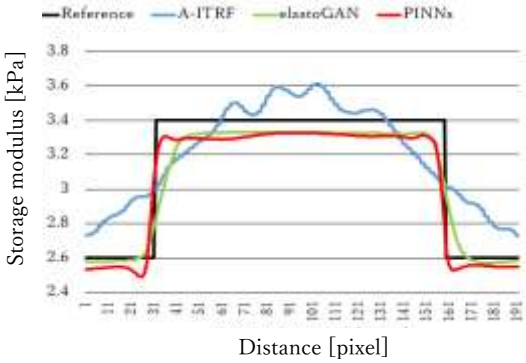


Fig. 6 Storage modulus profile

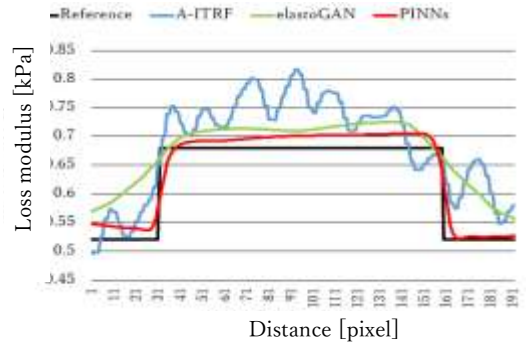


Fig. 7 Loss modulus profile

A-ITRF では背景領域で 5～15%の過大評価が生じ，内部領域では境界付近で過小評価，中心部で過大評価が確認された(Fig. 5, 6, 7)．elastoGAN は背景領域の精度は良好であったが，内包部輪郭が不規則となり，境界明瞭性は A-ITRF よりも良好であるが，PINNs よりも劣った．これは，データ駆動型学習および MSE 損失による境界平滑化の影響と考えられる．一方，PINNs は手法間で最も定量性と空間分解能が高かった．

6．まとめ

本研究では，境界部分の粘弾性分布を推定するため，物理法則を損失関数に組み込んだ PINNs を用いた手法を構築した．既存手法である A-ITRF や elastoGAN との比較検証の結果，PINNs を用いた提案手法は境界部分における定量性と空間分解能が同等以上であることが示された．今後の課題として，入力情報の拡張，計算効率の改善，および汎化性能の向上が挙げられる．

参考文献

1) R. Muthupilliai et.al., SIENCE, 269(5232), 1854-1857, 1995
2) T. Aoki et.al., Proc. ISMRM, 3212, 2022
3) Raissi, M., et al. arXiv preprint arXiv:1711.10561, 2017
4) 大塚厚二，他，共立出版, 2014
5) T. Takeda et al. IJARS, 2021, 16, pp.1947-1956.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-02：逆問題の数理的手法の近年の進展）

2026年5月16日(土) 10:35 ~ 11:50 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-02 (2)

座長:井手 貴範(城西大学)

10:35 ~ 10:50

[14006] 自重による梁の変形問題に対する密度型トポロジー最適化
(最適性基準法および修正最適性基準法による結果の比較)

*山田 瑞貴[1]、木村 和慎[1]、岸田 真幸[3]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学、3. 岐阜工業高等専門学校)

10:50 ~ 11:05

[14007] 地表面沈下量に基づく地盤内空洞の形状パラメータの同定解析

*渡邉 岳[1]、木村 和慎[1]、上林 恵太[2]、倉橋 貴彦[2] (1. 長岡技術科学大学大学院、2. 長岡技術科学大学)

11:05 ~ 11:20

[14008] 海洋短波レーダー観測データに基づく波浪スペクトル推定

*渡辺 楓[1]、谷地村 敏明[1]、寺田 翼[2]、亀田 洋志[2]、高橋 龍平[2]、水藤 寛[1] (1. 東北大学、2. 三菱電機株式会社情報技術総合研究所)

11:20 ~ 11:35

[14009] 基本解近似解法による離散 Dirichlet-to-Neumann 写像の収束性

*繁田 岳美[1] (1. 昭和薬科大学)

11:35 ~ 11:50

[14010] 電気インピーダンストモグラフィの完全電極モデルの実験データを用いた囲い込み法の適用

*井手 貴範[1]、Rautio Siiri[1]、Hauptmann Andreas[3]、Sippora Sara[2]、Siltanen Samuli[2] (1. 城西大学、2. ヘルシンキ大学、3. オウル大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

自重による梁の変形問題に対する密度型トポロジー最適化
（最適性基準法および修正最適性基準法による結果の比較）
Density-based topology optimization for beam deformation under self-weight
(A comparison of results using the conventional and modified optimality criteria methods)

山田　瑞貴（長岡技科大・工）　　木村　和慎（長岡技科大・工）　　岸田　真幸（岐阜高専・工）
上林　恵太（長岡技科大・工）　　倉橋　貴彦（長岡技科大・工）
Mizuki YAMADA, Nagaoka University of Technology
Kazuma KIMURA, Graduate School of Nagaoka University of Technology
Masayuki KISHIDA, National Institute of Technology, Gifu College
Keita KAMBAYASHI, Nagaoka University of Technology
Takahiko KURAHASHI, Nagaoka University of Technology
E-mail: s211084@stn.nagaokaut.ac.jp

In large structures, self-weight often becomes a significant load and should be considered in topology optimization. The optimality criteria (OC) method is widely adopted in topology optimization. However, the conventional OC method requires empirical tuning of parameters, such as the move-limit. Previous studies have demonstrated that the modified optimality criteria (MOC) method provides stable results independent of the move-limit for problems involving only fixed external loads. Nevertheless, its effectiveness under body forces, such as self-weight, remains unclear. Therefore, we compare the OC and MOC methods for a strain energy minimization problem under self-weight and investigate the influence of the move-limit and the penalization parameter. The results show that the OC method depends on the move-limit, and a large move-limit leads to loss of structural connectivity. In contrast, the MOC method consistently produces similar optimization results regardless of the move-limit. These findings indicate that the MOC method reduces parameter dependence even in problems dominated by body forces. In addition to these findings, increasing the penalization parameter was found to expand grayscale regions under self-weight in both methods.

１．はじめに

建築資材は有限であるため，使用材料を可能な限り削減しつつ，構造物を高性能化する技術が求められている．近年，与えられた制約のもとで所望する性能を最大化する形態を数理的に導出するトポロジー最適化が注目されている．特に大規模構造物の設計においては，構造物自体の重さによる変形を無視することができない．最適設計において，材料配置の変化に伴って分布が変動する自重の考慮は不可欠である．

実際に，大型構造物を対象として自重を考慮したトポロジー最適化に関する研究も行われている [1]．本研究では，数値計算が容易である密度型トポロジー最適化に着目する．密度型トポロジー最適化において，設計変数である無次元密度の更新には，最適性基準法（OC 法）が一般に用いられている [2]．しかし，従来の OC 法では更新量の大きさに関わるダンピングパラメータやムーブリミットといった任意パラメータを経験的に設定する必要があり，それらの値によって解析結果が変化するという問題がある．この問題に対し，ダンピングパラメータを自動で決定する修正最適性基準法（MOC 法）が提案された [3]．先行研究において，固定された外荷重のみを考慮した構造最適化問題では MOC 法を用いることでダンピングパラメータおよびムーブリミットの設定が簡略化されることが確認された．しかし，自重を考慮した構造最適化問題においても，MOC 法の持つこれらの特性が維持されるかは明らかではない．

そこで本研究では，自重を考慮したひずみエネルギー最小化問題に対して MOC 法を適用し，従来の OC 法と比較することで，体積力を考慮した場合のパラメータ依存性の低減効果を検証することを目的とする．さらに，一般にペナルティパラメータを大きく設定するとグレースケールの発生は抑制されることが報告されている [4]ことから，本研究では密度法のペナルティパラメータについても着目し，自重問題においてその値が両手法の最適化結果やグレースケールの残存傾向に及ぼす影響を併せて検討する．

２．定式化

密度法に基づき，各要素のヤング率E_eを無次元密度ρ_eを用いて次式で定義する．

$$E_e = (E_1 - E_0)\rho_e^p + E_0 \tag{1}$$

E_1は材料のヤング率，E_0は数値的不安定性回避のためのヤング率の下限値，pは中間密度を抑制するためのペナルティパラメータである．水平右向きをx軸，鉛直上向きをy軸とし，自重は要素密度に比例する体積力として$-y$方向に各要素の自重を節点荷重へと等分配して作用させる．

$$f_{e,x} = 0\,, f_{e,y} = -\rho_e \mu V_e g \tag{2}$$

μは材料密度，V_eは要素の体積，gは重力加速度である．

ひずみエネルギー最小化を目的とし，体積制約を課す本最適化問題は以下のように定式化される．

$$\min \quad J = \sum_{e=1}^{noe} \frac{1}{2}\{u_e\}^T [K_e]\{u_e\} \tag{3}$$

$$\text{subject to} \quad [K]\{u\} = \{f\} \tag{4}$$

$$G_V = \sum_{e\in\Omega} \frac{V_e \rho_e}{V_{total}} - \overline{\rho_0} \le 0 \tag{5}$$

$$0 \le \rho_e \le 1 \tag{6}$$

noeは総要素数，$\{u\}$は変位ベクトル，$[K]$は剛性行列，$\{f\}$は荷重ベクトルである．またV_{total}は設計領域の総体積，$\overline{\rho_0}$は初期平均無次元密度である．本問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く．ラグランジュ関数を定義し，その第一変分の停留条件を考慮することで次式に示す感度が得られる．

$$\frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e} = -\frac{1}{2}\{u_e\}^T \frac{\partial [K_e]}{\partial \rho_e}\{u_e\} + \{u_e\}^T \frac{\partial \{f_e\}}{\partial \rho_e} \tag{7}$$

自重は密度依存であるため，式(7)の第 2 項が生じる．この項により感度の符号が不定となり負の感度を前提とする OC 法および MOC 法を適用することが困難である．本研究では両手法のパラメータ依存性を比較することを目的とし，第 2 項を除いた感度式を用いて最適化を行う [1]．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e} = -\frac{1}{2}\{u_e\}^T \frac{\partial [K_e]}{\partial \rho_e}\{u_e\} \quad (8)$$

OC 法に基づいた無次元密度更新式を次式に示す.

$$\rho_e{}^{(k+1)} = \rho_e{}^{(k)} \left(\frac{\left(\overline{\frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e}}\right)^{(k)}}{-\Lambda^{(k)} \left(\frac{\partial G_v}{\partial \rho_e}\right)^{(k)}} \right)^{\eta} = \rho_e{}^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\eta} \quad (9)$$

ここで$\left(\overline{\frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e}}\right)$は感度フィルタによって平滑化した感度，$\eta$は更新量を調整のための任意のダンピングパラメータある．MOC 法に基づいた無次元密度更新式を次式に示す．MOC 法の指数部は最適化問題の設定によって異なり，本最適化問題ではpとρ_eを用いて表される [2].

$$\rho_e^{(k+1)} = \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A_e^{(k)}\right)\right)^{-1}} = \rho_e{}^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\frac{\rho_e}{p+1}} \quad (10)$$

3．計算条件

計算モデルは図 1 に示すような MBB-beam モデルとする．計算条件を表 1 に示す．各手法においてρ_{move}とpを変化させた場合の計算を行う．メッシュは四角形一次要素とする．

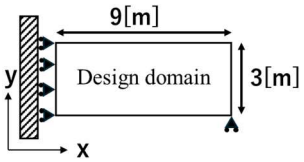


Fig. 1.MBB-beam model

Table1 Numerical condition

Number of elements / nodes	2700/2801
Mesh size [m]	0.1×0.1
Young's modulus E_1 [GPa]	200
Material density μ [kg/m³]	7850
Poisson's ratio ν	0.3
Penalization parameter p	3 , 6
Initial density average $\overline{\rho_0}$	0.5
Move-limit ρ_{move}	0.01 , 1
Convergence decision constants ϵ	1.0×10^{-6}
Maximum number of iterations k_{max}	500
Filtering radius R [m]	0.15
Gravitational acceleration g[m/s²]	9.8

4．解析結果

ペナルティパラメータを$p = 3$，6に設定した場合の OC 法，MOC 法による最終的な密度分布をそれぞれ図 2 および図 3 に示す.

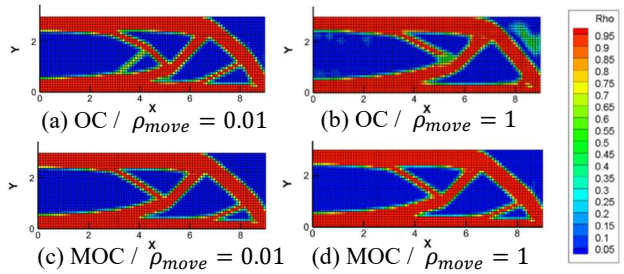


Fig. 2. Density distributions ($p = 3$)

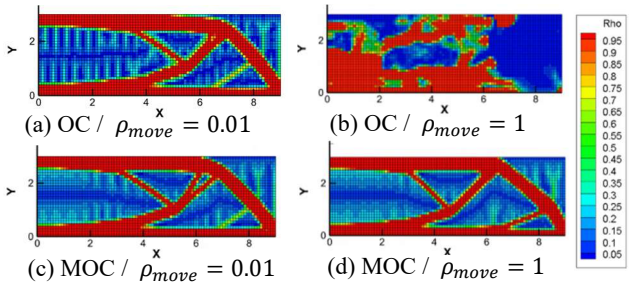


Fig. 3. Density distributions ($p = 6$)

OC 法を用いた場合，いずれのペナルティパラメータの条件においても，ムーブリミットの設定値によって異なる最終形状が得られた．図 2 と図 3 を比較すると，特にペナルティパラメータを大きく設定した場合には形状が完全に不連続となるような結果が表れている．一方，MOC 法を用いた場合では，OC 法での結果と比較してムーブリミットやペナルティパラメータの大小に関わらず，一貫して類似した形状が得られることが確認できた．これは MOC 法において要素ごと，イタレーションごとに適切な更新幅を設定できているからであると考えられる．また，本問題では両手法ともにペナルティパラメータを大きくするほどグレースケール領域が増加することが確認された．これは自重が要素の無次元密度依存であり，自重に対して低密度領域の剛性の低下が顕著となることに起因すると考えられる.

5．おわりに

本研究では，自重を考慮した密度型トポロジー最適化問題に対して MOC 法を適用し， その有効性を検証した．ペナルティパラメータに関する検討では両手法においてペナルティパラメータの増加に伴いグレースケール領域が増加する傾向が見られた．一方ムーブリミットに関する検討では，MOC 法を用いることでムーブリミットの影響を低減できることが示され，本問題においても先行研究と同様の傾向が得られた．また，パラメータの組み合わせにより形状が不連続になった OC 法に対し, MOC 法ではいずれの組み合わせにおいても類似した形状が得られた．以上より，体積力を考慮した問題においても MOC 法がパラメータ依存性の低減に有効であることが確認された.

参考文献

1) N. Jain and R. Saxena: Effect of self-weight on topological optimization of static loading structures, Alexandria Engineering Journal, vol.57, pp. 527–535, 2018.
2) M.P. Bendsoe, O. Sigmund: Topology optimization Theory, Methods and Applications, Springer, 2004.
3) M. Kishida and T. Kurahashi: Proposal of a modified optimality criteria method for topology optimization analysis in 3- dimensional dynamic oscillation problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.123, pp. 866-896, 2022.
4) M. P. Bendsøe and O. Sigmund: Material interpolation schemes in topology optimization , Archive of Applied Mechanics , vol.69 , pp. 635–654 , 1999.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

地表面沈下量に基づく地盤内空洞の形状パラメータの同定解析
Shape parameter identification of subsurface cavity based on ground surface settlement data

渡邉　岳（長岡技科大・工）　　木村　和慎（長岡技科大・工）
上林　恵太（長岡技科大・工）　　倉橋　貴彦（長岡技科大・工）
Takeru WATANABE, Graduate School of Nagaoka University of Technology
Kazuma KIMURA, Graduate School of Nagaoka University of Technology
Keita KAMBAYASHI, Nagaoka University of Technology
Takahiko KURAHASHI, Nagaoka University of Technology
E-mail: s233087@stn.nagaokaut.ac.jp

Identifying the location and geometry of underground cavities is important for the prevention of hazards. However, conventional methods for detecting underground feature such as ground penetrating radar require on-site investigation and needs to be operated by personnel, making continuous observation difficult. In this study, we focus on surface settlement data, which are limited but relatively inexpensive to obtain, and propose a numerical method for estimating the shape of underground cavity. The proposed method is formulated as an inverse analysis based on the adjoint variable method, in which identifies underground cavity shape using surface settlement data. Numerical experiments were conducted for an inverse problem in which ground deformation was simulated for a ground models containing an underground cavity. The cavity shape was estimated based on the calculated surface settlement and compared with the target cavity shape. The results indicated that the identification accuracy is not high enough under the present formulation of objective function, shape update scheme, and problem setting. Future work will focus on investigating the method to improve the identification accuracy.

１．はじめに

道路陥没などの対策を施行するためには，事前に路面下にある空洞の位置および形状を把握することが安全性評価のために必要となる．地盤内空洞の探査を地表から行う際，一般に，地中貫通レーダー探査のような，波動の伝播応答を測定する手法が用いられる [1]．このような手法は調査のために人員を用いて調査箇所の巡回を行う必要があり，定点的な観測が難しい．

そこで，従来手法で用いられる大掛かりな装備を伴わず，測量などにより比較的容易かつ安価に測定できると考えられる地表面の沈下量 [2]に着目する．荷重や地下水流の変動による地盤の変形挙動は，地盤内の空洞の有無や形状による影響を受ける．したがって，空洞を持つ地盤が変形した際に地表面で観測される変位量は，地下構造に関する情報を持つといえる．

本研究では，従来手法より安価で継続的に取得可能なデータを用いた地盤内空洞の探査手法を提案する．提案する手法では，地盤圧密現象により生じる地表面の垂直変位という，伝播応答と比べて限定的な観測量を用い，圧密解析と逆解析手法を用いて地盤内空洞の形状を同定することを試みる．

2．定式化

本稿で用いる記号を Table 1 にまとめる．なお，下付き添字i, jは空間方向を表し，総和規約に従う．

Table 1 Notation.

σ_{ij}	Total stress	σ'_{ij}	Effective stress
u_i	Displacement	p	Excess pore pressure
ϵ_{ij}	Strain	ϵ_v	Volumetric strain
k	Permeability	γ_w	Pore water unit weight
f_i	Body force	δ_{ij}	Kronecker delta
D_{ijkl}	Elastic stiffness	n_i	Outward normal vector

本研究の同定解析では，地表面の沈下量を観測し，逆解析により地下空洞の形状または形状パラメータを同定する．よって，地表面付近の鉛直方向変位vを観測値とし，観測変位v_{obs}と変位vの誤差を用いた評価関数Jを次式のように定義する．ここで，評価関数は地表境界付近の領域Ω_{obs}内で計算される．

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega_{obs}} (v - v_{obs})^2 d\Omega\, dt \tag{1}$$

定式化される形状同定問題では，地盤圧密を制約条件とし，随伴変数法により計算された感度を用いて地下空洞の形状，形状パラメータを更新し，この評価関数を最小化する．

また，本解析では Fig. 1 に示すような，内部に空洞を持つ地盤モデルを用いる．各境界の境界条件は Fig. 1 内に示す．ここで，空洞内は計算領域に含まれない．

地盤圧密は次式のような Biot の圧密理論 [3]に基づく支配方程式を用いて計算される． この方程式は地盤内の間隙水の流動と，それによる地盤の変形を表現する式である．

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \dot{f}_i = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} - \frac{k}{\gamma_w}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}\right) = 0 \tag{3}$$

式(2)は地盤内部における力の平衡状態を示し，全応力σ_{ij}と体積力f_iのつり合いを表している．式(3)は間隙水の流出入に関する質量保存の式であるが，本解析では土粒子，間隙水の非圧縮性を仮定することで，体積保存の式として定式化される．

全応力σ_{ij}は，間隙水にかかる過剰間隙水圧pと土骨格にかかる有効応力σ'_{ij}により分担され，以下の式で表される．

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p \tag{4}$$

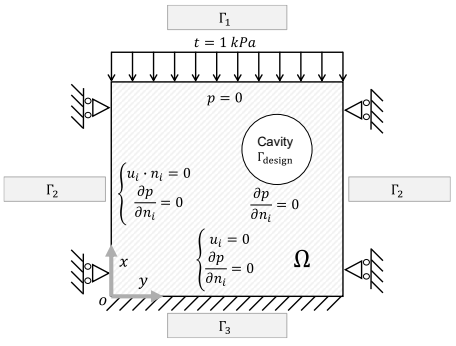


Fig. 1 Computational model with boundary condition.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

土骨格を線形弾性体とし，平面ひずみ状態を仮定する．有効応力σ'_{ij}はつぎの応力ひずみ関係式で表される．

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{5}$$

ひずみと変位の関係はつぎのような式で表される．

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

３．計算条件

Table 2 に解析条件をまとめる．

Table 2 Numerical condition.

Time step size	$20000[s]$
Load	$1000[Pa]$
Young's modulus	$9.8 \times 10^5[Pa]$
Poisson's ratio	$0.333[-]$
Pore water unit weight	$9800[N/m^3]$
Permeability	$10^{-5}[m/s]$

本解析では，実際の沈下量の観測値v_{obs}の代わりとして，既知の目標空洞形状を設定した地盤モデルにおける圧密現象の順解析によって得た沈下量を観測値v_{obs}として評価関数を計算し，同定解析の検証を行う．また，同定解析の初めに地盤モデルに初期推定空洞形状を設定し，このモデルの空洞形状を逆解析によって更新し，目標空洞形状を推定する．つぎの Fig.2 に目標形状モデルと初期推定形状モデルを示す．

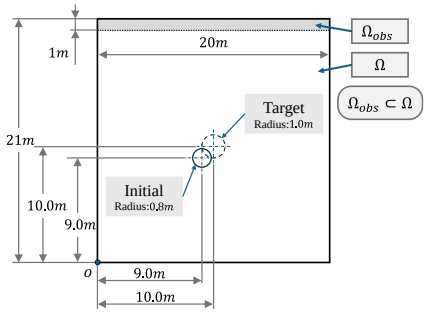


Fig. 2 Comparison of target and initial cavity shape models.

４．計算結果

評価関数の変動量が十分減少した時点での解析結果を以降に示す．この時点で評価関数は初期より 99.8%減少していた．

Fig. 3 に初期推定，目標および逆解析により推定された空洞形状を比較する．ここで，推定形状 A は空洞境界の各節点で感度を計算して独立に形状更新を行って推定した形状である．推定形状 A は初期推定形状が目標形状の方向に向かって押しつぶされたような形状となっている．目標形状と推定形状 A を比較すると，各モデルの概形および位置は大きくずれており，形状の同定精度は低い．

Fig. 4 は順解析によって各空洞形状モデルにおいて計算された地表境界上における沈下量vの分布を表す．各沈下量分布を比較すると，逆解析の初期推定形状モデルと目標形状モデルとの間では全体的に大きなずれがある．つぎに推定形状 A と目標形状の間では，沈下量分布のずれが小さくなっており，沈下量の谷の水平位置も近づいている．

この逆解析では空洞形状を更新することにより，推定形状モデルと目標形状モデルで計算される地表面沈下量分布の誤差を最小化することを目的としており，推定形状 A モデルで計算される沈下量分布が目標形状のものに明確に近づいており，

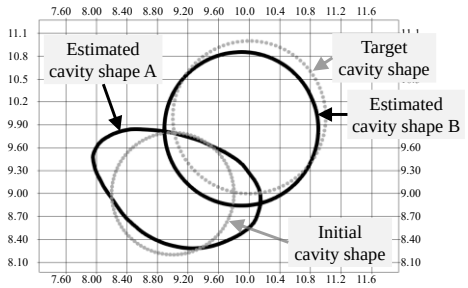


Fig. 3 Comparison of the target, initial and the estimated shapes.

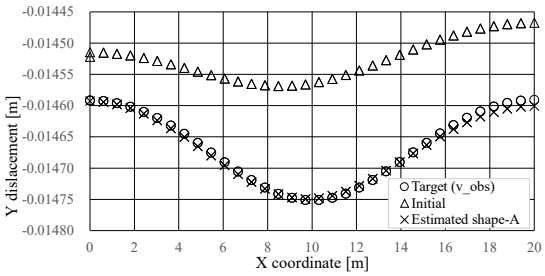


Fig. 4 Vertical displacement on surface boundary node.

これは同定解析により最適解が導かれていることを示しているといえる．しかし，Fig. 3 の空洞形状を比較すると，最終的な推定形状 A は目標形状の特徴を同定できているとはいえず，本解析で用いた問題設定や手法に基づいた同定解析では十分な精度で形状を同定することができなかった．

そこで，空洞の概形を円形と仮定し，その半径および中心位置に対する感度を計算する．この感度に基づき形状更新を行うことで Fig. 4 の推定形状 B を求めた．推定形状 B と目標形状を比較すると，半径および中心位置はいずれも目標形状のものに近づいており，概形を仮定することにより同定精度が改善することを示している．

５．おわりに

地表面沈下量から地下空洞の形状を推定することを目的とし，圧密解析により目標空洞および推定空洞をもつ地盤を模したモデルの地表境界付近の垂直変位をそれぞれ計算し，設定したモデル間での垂直変位の誤差を計算する評価関数に基づいて推定空洞形状を更新する手法について検証を行った．逆解析の結果より，本稿内の解析で設定した評価関数，形状更新手法および問題設定の下では，逆解析により推定される形状が目標形状と一致せず，同定解析の精度が不十分であることがわかった．講演では，本稿の内容に加え，半径，中心位置のような形状パラメータにより空洞形状を同定する手法についての検証を行った結果について述べる．

参考文献

1) Chuanyang Peng, Chao Wang, Zili Li: Review of geophysical data acquisition methods for underground feature detection and future trends, Tunnelling and Underground Space Technology Vol. 163, pp.106731, 2025.
2) NTT, inc.: World's First Demonstration of a Method for Detecting Early Signs of Road Cave-ins Using Reflected Radio Waves from SAR Satellites, NTT, 2025-11-07, https://group.ntt/en/newsrelease/2025/11/07/251107b.html, 参照 2026-02-03.
3) 地盤工学会，地盤技術者のための FEM シリーズ③ 有限要素法をつかう， 丸善出版(株)， 2010.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

海洋短波レーダー観測データに基づく波浪スペクトル推定
Ocean Wave Spectrum Estimation Based on High-Frequency Radar Observation Data

渡辺　楓（東北大・理）　谷地村　敏明（東北大・MathCCS）　寺田　翼（三菱電機）
亀田　洋志（三菱電機）　高橋　龍平（三菱電機）　水藤　寛（東北大・AIMR）
Kaede Watanabe, Tohoku University
Toshiaki Yachimura, Tohoku University
Tsubasa Terada, Mitsubishi Electric Corporation
Hiroshi Kameda, Mitsubishi Electric Corporation
Ryuhei Takahashi, Mitsubishi Electric Corporation
Hiroshi Suito, Tohoku University
E-mail: kaede.watanabe.t3@dc.tohoku.ac.jp

海洋短波レーダーとは，電磁波を海面に向けて放射し，反射した後方散乱波を受信する観測システムである．得られた電磁波の周波数ごとの強度分布はドップラースペクトルと呼ばれる．このドップラースペクトルから，波浪を構成する正弦波のエネルギー分布である波浪スペクトルを推定する手法がこれまでに考案されてきた．波浪スペクトルは，そこから波の高さや方向などの情報を得られる点で，海洋観測や産業活動において重要な物理量である．しかし，現在提案されている手法には推定精度に課題があり，波浪スペクトルをより正確に推定する手法の開発が求められている．本講演では，非負性を保つ正則化に基づき波浪スペクトルを再構成する手法を提案し，その実データへの応用可能性について報告する．

1．はじめに

海洋短波レーダーとは電磁波を海に向けて放射し，その反射した後方散乱波を受信するシステムである．取得した電磁波をスペクトル解析したものはドップラースペクトルと呼ばれる（Fig. 1）．海の波浪は成分波という異なる方向と波数をもった波の重ね合わせで表現されており，それらがレーダーから放射された電磁波の反射に寄与している．したがって，ドップラースペクトルはそれら成分波の情報を反映していると考えられる．ドップラースペクトルには 2 つの大きなピークがあり，それらを 1 次ドップラースペクトルという．これは，電磁波の波数ベクトルを$\boldsymbol{k_0} = (k_0, 0)$としたときに，波数ベクトル$\pm 2\boldsymbol{k_0}$の成分波に反射することによって引き起こされる．この現象を 1 次散乱という．ドップラースペクトルにおいて 1 次ドップラースペクトル以外の部分を 2 次ドップラースペクトルという．これは 2 次散乱と呼ばれる現象によって生じており，複数存在する波浪の成分波のうち，$\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} = \pm 2\boldsymbol{k_0}$を満たす 2 つの波数ベクトル$\boldsymbol{k_1}$，$\boldsymbol{k_2}$の成分波に反射することで引き起こされたものである．

この 2 つの波数ベクトル$\boldsymbol{k_1}$，$\boldsymbol{k_2}$を用いて，2 次ドップラースペクトル$\sigma_2(\omega)$と波浪スペクトルSの間には以下の関係式が成り立つ．

$$\sigma_2(\omega) = 2^6\pi k_0^4 \sum_{m_1=\pm1}\sum_{m_2=\pm1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(m_1, m_2, \omega, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})|^2 S(m_1\boldsymbol{k_1})S(m_2\boldsymbol{k_2})\delta(\omega - m_1\sqrt{gk_1} - m_2\sqrt{gk_2})\,dp\,dq. \quad (1)$$

ただし，ωはドップラースペクトルにおいて観測される電磁波の角周波数である．ここで，$\boldsymbol{k_1} = (p - k_0, q)$, $\boldsymbol{k_2} = (-p - k_0, -q)$であり，これらの和は$\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} = -2\boldsymbol{k_0}$となる．$\boldsymbol{k_1}$と$\boldsymbol{k_2}$の大きさをそれぞれ$k_1 = |\boldsymbol{k_1}|$，$k_2 = |\boldsymbol{k_2}|$という記号で表す．$g$は重力加速度である．また，$\Gamma$は結合係数と呼ばれる重み関数で，$\delta$はデルタ関数である．

方程式(1)からSを逆変換するためにさまざまな取り組みがなされてきた[1),2),3),4),5),6)]．一方で，この 2 次ドップラースペクトルから波浪スペクトルを逆解析する手法に関して，理論的な解析は十分になされてこなかった．本講演では，理論的に保証された波浪スペクトル推定手法を構築し，それを用いて高精度な波浪スペクトル再構成を行うことを目的とする．

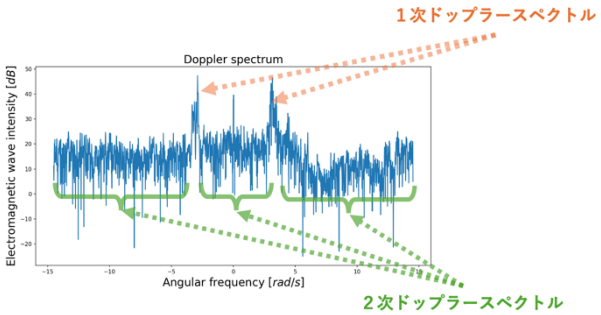


Fig. 1 Example of a Doppler spectrum.

2．波浪スペクトル推定手法の概要

ドップラースペクトルにおいて観測される電磁波の角周波数の集合をKとし，$\pm\sqrt{2gk_0}, \pm 2\sqrt{gk_0} \notin K$を仮定する．この仮定のもと，2 次ドップラースペクトル$\sigma_2(\omega)$と波浪スペクトルSの間に成り立つ関係式を今後は$A[S](\omega)$と書く．この関係式に関して次の命題が成り立つ[7)]．

命題 1

波浪スペクトルSについて$S \in H^1(\mathbb{R}^2)$を仮定する．このとき，以下が成り立つ．

$$A[S](\omega) = 2^6\pi k_0^4 \sum_{m_1=\pm1}\sum_{m_2=\pm1}\int_{f_{m_1,m_2}^{-1}(\omega)} |\Gamma(m_1, m_2, \omega, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})|^2 S(m_1\boldsymbol{k_1})S(m_2\boldsymbol{k_2})\frac{1}{|\nabla f_{m_1,m_2}(p,q)|}ds.$$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

ただし，

$$f_{m_1,m_2}(p,q) := m_1\sqrt{gk_1} + m_2\sqrt{gk_2}$$

である．

この結果を用いて，2 次ドップラースペクトル$\sigma_2(\omega)$から波浪スペクトルSを，正則化手法を用いて再構成する．本研究では波浪スペクトルの正値性を保つため，非負スパース正則化を用いる．すなわち，以下の最適化問題を考え，それを最小化するSを，求める波浪スペクトルとする．

$$\arg\inf_{S\in H^1(\mathbb{R}^2)} \Theta(S) := F(S;y^\delta) + \alpha\Phi(S).$$

ここで，汎函数Fはチコノフ汎函数であり，$\|A[S](\omega) - \sigma_2(\omega)\|_{L^2}{}^2 + \lambda\|S\|_{L^2}{}^2$の形をしている．ただし，$\lambda > 0$は正則化パラメータである．また，$\Phi(S)$は以下の形をしている．

$$\Phi(S) = \begin{cases} \sum_{i,j\in\Lambda} S_{i,j}, & \text{if } S \geq 0, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで，$\alpha > 0$であり，$S_{i,j}$は波浪スペクトルを離散化した際の，各格子点における値である．$\Phi(S)$は波浪スペクトルの物理的な条件である正値性を保ち，スパースに波浪スペクトルを再構成する効果を持つ．

3．数値実験

波浪スペクトル再構成に関する最適化問題について，近接勾配法に基づくアルゴリズムで，最小化解を求めた．数値実験では波浪スペクトルのモデルを作成し（Fig. 2），ここに一様乱数を用いてL^2相対誤差 50%で摂動を加え，摂動を加えた波浪スペクトルをアルゴリズムの初期値とした（Fig. 3）．結果として得られた波浪スペクトル（Fig. 4）のL^2相対誤差は約 4.8%であった．

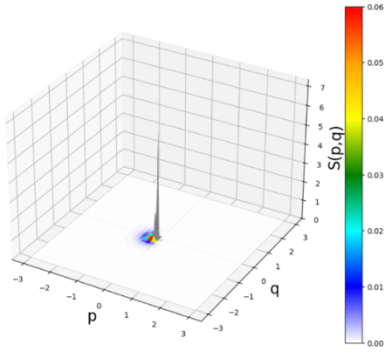


Fig. 2 Ground-truth wave spectrum.

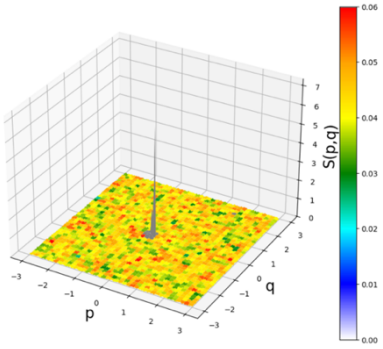


Fig. 3 Perturbed wave spectrum.

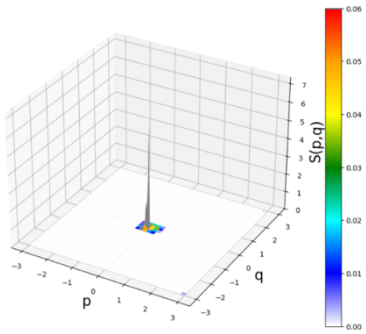


Fig. 4 Reconstructed wave spectrum.

4．おわりに

本稿では，適切な仮定のもと方程式(1)の特異性を除去し，その結果に基づいて非負スパース正則化を用いた波浪スペクトル推定手法を構築した．数値実験から，本手法の波浪スペクトル推定への有用性が示唆された．今後は，波浪状況に合わせた適切なハイパーパラメータの設定方法について検討を行う．なお，当日の講演では，逆問題の安定性に関する結果，具体的な波浪スペクトル推定アルゴリズムと実データを用いた推定結果も含めて報告する．

参考文献

1) B. J. Lipa and D. E. Barrick. Analysis Methods for Narrow-beam High-frequency Radar Sea Echo. NOAA Technical Report ERL, WPL. U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, Environmental Research Laboratories, 1982.

2) Y. Hisaki. Nonlinear inversion of the integral equation to estimate ocean wave spectra from HF radar. Radio Science, Vol. 31, No. 1, pp. 25–39, 1996.

3) J. J. Green and L. R. Wyatt. Row-action inversion of the Barrick–Weber equations. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, Vol. 23, No. 3, pp. 501–510, 2006.

4) L. R. Wyatt, J. J. Green, A. Middleditch, M. D. Moorhead, J. Howarth, M. Holt, and S. Keogh. Operational wave, current, and wind measurements with the Pisces HF radar. IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 31, No. 4, pp. 819–834, 2006.

5) Y. Hisaki. Development of HF radar inversion algorithm for spectrum estimation (HIIAS). Journal of Geophysical Research: Oceans, Vol. 120, No. 3, pp. 1725–1740, 2015.

6) 片岡智哉．短波海洋レーダとベイズ型モデルを用いた浅海域の方向スペクトルの推定．国総研資料 895，国土交通省 国土技術政策総合研究所，日本, 2016. ISSN 1346-7328.

7) K. Watanabe, H. Suito, T. Yachimura and T. Terada. Ocean wave spectrum reconstruction from HF radar data and its application to wave height estimation. arXiv preprint (2025/05), DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.13132

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

基本解近似解法による離散 Dirichlet-to-Neumann 写像の収束性

Convergence of the Discrete Dirichlet-to-Neumann Map
Using the Method of Fundamental Solutions

繁田　岳美（昭和薬科大学 応用数学研究室）
Takemi SHIGETA, Laboratory of Applied Mathematics, Showa Pharmaceutical University
E-mail: shigeta@ac.shoyaku.ac.jp

The Dirichlet-to-Neumann (DtN) map for exterior boundary value problems of the Laplace equation maps Dirichlet data on the boundary to the corresponding normal derivative and plays an important role in numerical computations. In this study, the DtN map is discretized by the method of fundamental solutions (MFS) for exterior problems with a circular boundary. Under equally distributed boundary and source points, the convergence of the resulting discrete DtN map is investigated.

1. はじめに

楕円型偏微分方程式の境界値問題に対して，Dirichlet-to-Neumann (DtN) 写像は境界上の Dirichlet データを対応する法線微分へ写す作用素として定義される．DtN 写像は境界観測に基づく逆問題の数値計算や非有界領域問題を解く際の透明境界条件の構成において重要な役割を果たす．実際，Poisson 方程式や非斉次 Helmholtz 方程式の外部境界値問題に対して，円形人工境界上で透明境界条件を課すことにより，元の非有界領域問題を二重連結有界領域問題として解くことができる[5),6)]．

本稿では，簡単のため，2 次元 Laplace 方程式における DtN 写像を基本解近似解法 (MFS) を用いて離散化する[1),3)]．このとき，得られる離散 DtN 写像が真の DtN 写像に収束するためには，離散 DtN 写像の固有値が真の DtN 写像の固有値に収束することが十分条件であることを示す．また，固有値の収束性を数値実験により示す．

2. 問題設定

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における半径 $R>0$ の円板に対する外部領域 $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > R\}$ において，次の Laplace 方程式の外部 Dirichlet 問題を考える:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{1a}$$

$$u = g \qquad \text{on} \quad \Gamma := \partial\Omega, \tag{1b}$$

$$u(x) = O(|x|^{-1}) \quad \text{as} \quad r := |x| \to \infty. \tag{1c}$$

境界 Γ 上に Dirichlet データ $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ が与えられたとき，$n := -x/R$ を境界 Γ 上の領域 Ω に対する外向き単位法線とし，境界値問題 (1) の解の法線微分 $\partial u/\partial n|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ を与える Dirichlet-to-Neumann (DtN) 写像 $\Lambda : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ を考える:

$$\Lambda g := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, \qquad \forall g \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2}$$

Dirichlet データ g を

$$g(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{g}_j e^{ij\theta}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

と Fourier 級数展開する．ここに，$i := \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，(1) の解は

$$u(r,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}_j}{R^{|j|}} e^{ij\theta}, \qquad r \ge R, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

と表されるので，

$$(\Lambda g)(\theta) = -\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|j|\widehat{g}_j}{R} e^{ij\theta}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

と導かれる．

以上より，特に $g(\theta) = e^{ik\theta}$ のとき，Kronecker のデルタ δ_{kj} を用いると $\widehat{g}_j = \delta_{kj}$ であるので，

$$\Lambda e^{ik\theta} = \frac{|k|}{R} e^{ik\theta}, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

が容易に得られる．(3) は DtN 写像の固有値 $|k|/R$ に対応する固有関数が Fourier モード $e^{ik\theta}$ であることを意味する．

3. 基本解近似解法による DtN 写像の離散化

2 次元 Laplace 作用素の基本解を用いて，

$$G(x,y) := -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|x-y|}{|x|} \tag{4}$$

と定める．(4) は無限遠点での条件 (1c) を満たす．このとき，$\theta_j := 2\pi(j-1)/N$, $y_j := \rho(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$ $(0 < \rho < R)$ とし，領域 Ω の外部の円周上に等間隔に配置された N 個の源点 $\{y_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ を用いて，問題 (1) の解 u を N 個の関数 $\{G(\cdot, y_j)\}_{j=1}^N$ の線形結合により近似する:

$$u(x) \approx u^{(N)}(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G(x, y_j), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

(5) は (1a), (1c) を満たすので，(1b) を満たすように未知展開係数 $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ を決定すればよい．これが基本解近似解法 (MFS) である[1),3)]．境界 Γ 上に N 個の選点 $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \Gamma$ を等間隔に配置する．ここに，$x_k := R(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ である．これらの選点上で境界条件 (1b) を満たすことから，未知数 $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ に関する連立 1 次方程式

$$u^{(N)}(x_k) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G(x_k, y_j) = g(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

すなわち

$$C_0 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{g} \tag{6}$$

を得る．ここに，C_0 は (k,j) 成分を $G(x_k, y_j)$ とする N 次正方行列であり，

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T, \quad \boldsymbol{g} := (g(\theta_1), g(\theta_2), \ldots, g(\theta_N))^T$$

である．

さらに境界上の法線微分を求めると，

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\frac{\partial u^{(N)}}{\partial n}(x_k) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial G}{\partial n}(x_k, y_j), \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

すなわち

$$\boldsymbol{q} = C_1 \boldsymbol{\alpha} \tag{7}$$

を得る．ここに，C_1 は (k, j) 成分を $\partial G(x_k, y_j)/\partial n$ とする N 次正方行列であり，

$$\boldsymbol{q} := \left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial n}(x_1), \frac{\partial u^{(N)}}{\partial n}(x_2), \ldots, \frac{\partial u^{(N)}}{\partial n}(x_N) \right)^T$$

である．

(6), (7) より，$\boldsymbol{\alpha}$ を消去すると，

$$C_1 C_0^{-1} \boldsymbol{g} = \boldsymbol{q} \tag{8}$$

が得られる．(8) は (2) の離散化に対応する．したがって，DtN 写像 Λ を離散化した行列（離散 DtN 写像とよぶ）

$$\Lambda_N := C_1 C_0^{-1} \tag{9}$$

が導かれる．

いま，行列 C_0, C_1 はともに巡回行列である．したがって，Fourier 行列 $W := \left(\omega^{(j-1)(k-1)}/\sqrt{N}\right)$（$\omega := \exp(2\pi i/N)$ は回転因子）を用いると，離散 DtN 写像 (9) の N 個の固有ベクトルを並べて作った行列 V は W の随伴行列 W^* と等しくなる．よって，Λ_N を

$$W \Lambda_N W^* = V^* \Lambda_N V = \mathrm{diag}(\widehat{\boldsymbol{c}_1} \oslash \widehat{\boldsymbol{c}_0}) \tag{10}$$

と対角化することができる[2),7)]．ここに，$l = 0, 1$ に対して，$\widehat{\boldsymbol{c}_l} := \mathcal{F}(\boldsymbol{c}_l) := W\boldsymbol{c}_l$ は行列 C_l の第 1 列 $\boldsymbol{c}_l$ の離散 Fourier 変換，$\widehat{\boldsymbol{c}_1} \oslash \widehat{\boldsymbol{c}_0}$ は $\widehat{\boldsymbol{c}_1}$ と $\widehat{\boldsymbol{c}_0}$ の Hadamard 除算を表す．

(10) より，高速 Fourier 変換 (FFT) を適用して，離散 DtN 写像を効率的に計算することができる[4)–6)]．

4. 離散 DtN 写像の収束

標本化作用素 $S_N : C(\Gamma) \to \mathbb{R}^N$ を

$$(S_N f)_j := f(\theta_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

により定義する．選点数 N が偶数のとき，添え字集合を

$$I_N := \left\{ -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}-1 \right\}$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ の離散 Fourier 変換 $\widehat{\boldsymbol{v}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ に対して，再構成作用素 $R_N : \mathbb{R}^N \to \mathrm{span}\{e^{ik\theta} : k \in I_N\}$ を

$$(R_N \boldsymbol{v})(\theta) := \sum_{k \in I_N} \widehat{v}_k e^{ik\theta}$$

により定義する．前節で MFS により構成された離散 DtN 写像 $\Lambda_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ はベクトルに対する写像であるため，関数に対する写像に置き換えた

$$\widetilde{\Lambda}_N := R_N \Lambda_N S_N$$

を離散 DtN 写像として扱う．この $\widetilde{\Lambda}_N$ を Λ と比較する．

有限 Fourier 空間

$$X_M := \mathrm{span}\{e^{ik\theta} : |k| \le M\}$$

に対して，$f \in X_M$ は有限 Fourier 級数展開される:

$$f(\theta) = \sum_{|k| \le M} a_k e^{ik\theta}.$$

このとき，Λ の固有値を $\lambda_k := |k|/R$ とおくと，(3) より

$$(\Lambda f)(\theta) = \sum_{|k| \le M} a_k \lambda_k e^{ik\theta}, \quad (\widetilde{\Lambda}_N f)(\theta) = \sum_{|k| \le M} a_k \lambda_k^{(N)} e^{ik\theta}$$

が成り立つ．したがって

$$(\widetilde{\Lambda}_N - \Lambda) f = \sum_{|k| \le M} a_k (\lambda_k^{(N)} - \lambda_k) e^{ik\theta}$$

を得る．

ここで，$L^2(0, 2\pi)$ ノルムを用いれば

$$\|(\widetilde{\Lambda}_N - \Lambda) f\|_{L^2} \le \max_{|k| \le M} |\lambda_k^{(N)} - \lambda_k| \, \|f\|_{L^2}$$

が従うので，作用素ノルムの評価として

$$\|\widetilde{\Lambda}_N - \Lambda\|_{\mathcal{L}(X_M, X_M)} = \sup_{f \in X_M \setminus \{0\}} \frac{\|(\widetilde{\Lambda}_N - \Lambda) f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \le \max_{|k| \le M} |\lambda_k^{(N)} - \lambda_k|$$

が得られる．

したがって，任意の固定した M に対して

$$\lim_{N \to \infty} \max_{|k| \le M} |\lambda_k^{(N)} - \lambda_k| = 0$$

を示すことができれば，

$$\lim_{N \to \infty} \|\widetilde{\Lambda}_N - \Lambda\|_{\mathcal{L}(X_M, X_M)} = 0,$$

すなわち X_M 上で離散 DtN 写像が真の DtN 写像に収束することを結論づけられる．

5. 離散 DtN 写像の固有値の収束

離散 DtN 写像 Λ_N の固有値 $\lambda_k^{(N)}$ と (3) で示した真の DtN 写像 Λ の固有値 $\lambda_k = |k|/R$ に対して，N が偶数のとき，

$$\lim_{N \to \infty} |\lambda_k^{(N)} - \lambda_k| = 0, \qquad k \in I_N$$

となることを数値実験により確認する．

6. おわりに

本稿では，MFS により構成される離散 DtN 写像の収束性について考察した．発表では数値実験の結果を示し，離散 DtN 写像の固有値が真の DtN 写像の固有値に収束する様子を確認する．今後は，DtN 写像の固有値の収束性に関する理論的解析について検討を進める予定である．

参考文献

1) Bogomolny, A.: Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **22**, 4 (1985), 644–669.
2) Davis, P. J.: Circulant Matrices, Second edition, AMS Chelsea Publishing (2012).
3) Mathon, R. and Johnston, R. L.: The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **14**, 4 (1977), 638–650.
4) Shigeta, T.: Mathematically improved convergence analysis for the non-overlapping domain decomposition method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **166** (2024), 105805.
5) 繁田岳美: 基本解近似解法を用いた 2 次元 Poisson 方程式の外部境界値問題に対する直接数値解法，計算工学講演会論文集，**30** (2025), 1–4.
6) 繁田岳美: 2 次元 Helmholtz 方程式の外部 Dirichlet 問題に対する Dirichlet–Neumann 写像の効率的数値計算，計算数理工学論文集，**25** (2025), 71–75.
7) Smyrlis, Y.-S. and Karageorghis, A.: Efficient implementation of the MFS: The three scenarios, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **227** (2009), 83–92.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

電気インピーダンストモグラフィの完全電極モデルの実験データを用いた囲い込み法の適用

Learned enclosure method for finding convex hull for experimental complete electrode model in EIT

井手　貴範（城西大・理）　Siiri Rautio（城西大・理）　Sara Sippola（ヘルシンキ大学）
Andreas Hauptmann（オウル大学）　Samuli Siltanen（ヘルシンキ大学）
Takanori Ide, Josai University
Siiri Rautio, Josai University
Sara Sippola, University of Helsinki
Andreas Hauptmann, University of Oulu
Samuli Siltanen, University of Helsinki
E-mail: tide@josai.ac.jp

Electrical Impedance Tomography (EIT) is non-destructive imaging method such as medical image that recovers image of the inclusions from boundary measurements. The mathematical model of EIT is proposed by Calderón.[1] Enclosure method is reconstructing the convex hull of the inclusion from boundary measurements proposed by Ikehata. We propose novel method to reconstruct convex hull of the inclusion from boundary measurements by using neural networks and enclosure method. As the application of proposed method, we will demonstrate our proposed method for finding convex hull in experimental EIT data.

1. はじめに

Electrical Impedance Tomography(EIT) は物体の表面に電圧を与えた時，物体表面に発生した電流の計測値から内部包含物の位置を画像で再構成する非破壊検査法として知られている．医療画像診断の応用先として，乳癌の位置の同定がある．EIT は CT, MRI に比べて画像の解像度は低いが，検査機器が安価であり，放射線を使わないため人体への負担が大変少ない．そのため，EIT によって得られる内部包含物の画像の解像度を高くすることが求められている．

EIT は次の偏微分方程式の逆問題として記述することができる[1]．特に，$\mathbb{R}^2$ 内の物体 Ω（有界集合）の電気伝導度を $\sigma = \sigma(x, y)$ とし $u = u(x, y)$ を電圧のポテンシャルとすると次の偏微分方程式で記述される数理モデルは EIT の連続体モデルと呼ばれる．

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \ in \ \Omega, \\ u = f \ on \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，n を境界 ($\partial\Omega$) 上の単位法線ベクトルとし，以下のような Dirichlet–Neumann 写像を与える．

$$\Lambda : f \to \sigma \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} \tag{2}$$

また，電気伝導度を次のように与える．

$$\sigma(x, y) = 1 + \chi_D(x, y)h(x, y) \tag{3}$$

ここで，$D \subset \Omega$ を内部包含物の集合とし，次式が成り立つとする．

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, \ (x, y) \ \in \ D \\ 0, \ (\text{ その他 }) \end{cases}. \tag{4}$$

この時, Calderón の問題と呼ばれる
”Dirichlet–Neumann 写像 Λ から内部包含物 D を再構成できるのか?”
を解くために，数理解析的な再構成法として知られている囲い込み法[2] とニューラルネットワークを融合した手法を提案した[3]．提案した方法は現実の測定データに適用するためには現象を支配する数理モデルを変更する必要がある．本公演では完全電極モデルと呼ばれる偏微分方程式で記述される EIT の問題を考え，囲い込みニューラルネットワークを測定データに適用する手法と結果を紹介する．

2. 完全電極体モデル

実験における計測データは雑音を含む．また，所望する箇所のデータを全て取得することが出来ないことが多い。つまり、不完全な情報を用いて内部包含物の情報を正確に抽出するのは極めて困難な問題であり，理論と実用の観点から極めて重要である．本講演において，有限個の観測データから内部包含物を再構成する囲い込みニューラルネットワークを紹介する．

EIT の実験においても物体の周囲全体に測定装置である電極をつけることは難しい．そのため，物体の周囲に有限個の測定装置をつけることが現実的である．本研究において，物体の境界において有限個の電極をつけた数理モデルとして完全電極体モデルを採用する．物体 Ω 内の内部包含物の集合 D の電気伝導度 σ が連続体モデルと同じ場合，完全電極体モデルは次の偏微分方程式で記述される[4]．

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \ in \ \Omega, \\ u + \zeta_l \sigma \dfrac{\partial u}{\partial n} = V_l \ on \ e_l, \ l = 1, \cdots, L. \end{cases} \tag{5}$$

ここで，e_l は電極，ζ_l は接触抵抗，V_l は電極 e_l における電圧とし，電圧は

$$\sum_{l=1}^{L} V_l = 0 \tag{6}$$

を満たすとする．

3. 実験データへの適用

完全電極モデルの実験データとして 2 次元 EIT のオープンデータセットを用いる.[5] 囲い込みニューラルネットワークを実験データへ適用した結果は講演時に紹介する[6].

参考文献

1) A.P. Calderón, On an inverse boundary value problem, Semi-

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

nar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (1980), 65–73.
2) M. Ikehata, Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements, Journal of Inverse and Ill–Posed Problems, 8 (2000), 367–378.
3) S. Siltanen, T. Ide, Electrical impedance tomography, enclosure method and machine learning, Proceeding of 2020 IEEE 30th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, (2020), 1–6.
4) M. Cheney, D. Isaacson and J. C. Newell, Electrical impedance tomography, SIAM Review, 41 (1999), 85-101.
5) A. Hauptmann, V. Kolehmainen, N. M. Mach, T. Savolainen, A. Seppanen and S. Siltanen, Open 2d electrical impedance tomography data archive, arXiv preprint, arXiv:1704.01178, (2017).
6) S. Sippola, S. Rautio, A. Hauptmann, T. Ide, S. Siltanen, Learned enclosure method for experimental EIT data, Applied Mathematics for Modern Challenges, 4, (2025), 47-65

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-01：波動現象の数理・数値解析とその応用）

2026年5月16日(土) 15:00 ~ 16:00 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-01 (1)

座長:丸山 泰蔵(東京科学大学)

15:00 ~ 15:15

[14011] 境界要素法による磁性流体界面流動の逐次解析

*水田 洋[1] (1. 元 北海道大学)

15:15 ~ 15:30

[14012] 境界要素法の係数行列対称性を利用したproxy法に基づく高速直接解法の効率化

*松本 安弘[1]、丸山 泰蔵[2]、Ma Qianxiang[3]、横田 理央[4] (1. 東京科学大学 情報基盤センター、2. 東京科学大学 環境・社会理工学院、3. 理化学研究所 計算科学研究センター、4. 東京科学大学 総合研究院)

15:30 ~ 15:45

[14013] 有限階作用素による境界積分方程式の安定化について

*松島 慶[1] (1. 広島大学)

15:45 ~ 16:00

[14014] フォトンのスピンを考慮した電磁波の境界要素法

*植田 毅[1] (1. 東京慈恵会医科大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

境界要素法による磁性流体界面流動の逐次解析
Recursive interface analysis of magnetic fluids by the Boundary Element Method

水田　洋 (元 北大・工)
Yo MIZUTA, Hokkaido University
E-mail: ymizu0045@gmail.com

The present paper is devoted for numerical analysis of interface phenomena of magnetic fluids in real space and time. The employed Boundary Element Method (BEM) obtains not only the magnetic potential and the normal magnetic induction for static magnetic fields but also the fluid velocity potential and the normal fluid velocity for incompressible-irrotational fluids, on arbitrary-shaped interfaces. While the discretization process of the basic equations of BEM, two problems of multiplicity and singularity are managed. Produced computational code has been applied to obtain physical quantities on the interface between the fluid and vacuum in the two-layered system under homogeneous vertical magnetic field. Before the destabilization of the interface, behaviors of the magnetic field, stresses and fluid velocity are investigated as well as the interface elevation.

1. はじめに

ナノサイズの強磁性体微粒子を水やケロシンなどに拡散させた磁性流体には，印加磁場を強くするにつれて流体真空の間の界面が変形したり不安定化する特有の現象があり [1]，任意形状界面を通して相互作用する磁場流体両系の解析が必要になる．ただし，非圧縮・非回転・非粘性流体と電気的絶縁性で無電場無電流を仮定すれば，流速ポテンシャル φ, 流速 $\boldsymbol{v}$ に対して $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$，磁束密度 $\boldsymbol{b}$, 磁場 $\boldsymbol{h}$, 磁気ポテンシャル ϕ, 透磁率 μ に対して $\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\nabla\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=\mu\nabla\phi$ となり，流体解析では φ と法線流速 v_n を，磁場解析では ϕ と法線磁束密度 b_n を，共に**境界要素法**を用いて境界に限って求めることができる．本論文では，**直接境界要素法** [2,3] を磁場流体解析に，**界面力学方程式** [4,5] を流体解析に用いて，磁性流体と真空から成る Fig. 1 の一様鉛直磁場中の 2 層系の界面が，強い印加磁場で不安定化するときの界面変位 ζ・界面応力和 S・界面磁束密度 $\boldsymbol{b}$・界面流速 $\boldsymbol{v}$ の関係を調べる．

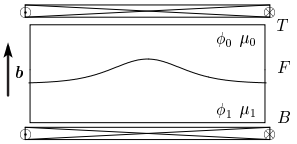


Fig.1　Two-layered system under homogeneous vertical magnetic field.

2. 解析の流れ

φ,v_n または ϕ,b_n を求めるため，ϕ_J,b_{IJ} に対する境界要素法の基礎式

$$\begin{cases} \alpha\phi_J = \oint_{S_J} \mathrm{d}S' \left(q_J\phi'_J - \psi_J b'_{ZJ}\right), \\ \alpha\dfrac{b_{IJ}}{\mu_J} = \oint_{S_J} \mathrm{d}S' \left(q_{IJ}\phi'_J - \psi_{IJ} b'_{ZJ}\right), \end{cases} \tag{1}$$

を離散化するとき，境界同士が鋭角で交わる交線上の物理量の**多価性**を考慮しながら，離散化係数が対角項で持つ**特異性**を**定ベクトル場条件**で回避する [6,7,8]．磁場解析では，界面上の ϕ,b_n が共に未知として界面条件 (界面をはさんで流体真空両領域の ϕ,b_n が連続) を用いる．一方流体解析では，φ を与えて v_n を求める Dirichlet 条件を界面で課し，$\boldsymbol{t}_Z$ を法線単位ベクトルとして，界面流速 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi\times\boldsymbol{t}_Z+v_\mathrm{n}\boldsymbol{t}_Z$ を決める (Fig. 2)．$\boldsymbol{v}$ を時間積分すれば，時間ステップごとの界面形状 (界面上の点の座標) $\boldsymbol{r}$ が決まる．φ を求めるには，S, T_N, G, C, ρ, D, p_0 を界面応力和・磁気応力差・重力ポテンシャル・表面張力・流体密度・動圧・大気圧として，Bernoulli 方程式と界面上の力学的条件から導かれる**界面力学方程式** [4,5] (以後 $D\simeq 0$, $p_0\simeq 0$)

$$\rho\partial\varphi/\partial t + S = 0, \quad S \equiv T_\mathrm{N} + G + C + D + p_0 \tag{2}$$

を時間積分する．$\boldsymbol{r}$ と φ の時間積分は同時並行的に行う必要がある．これは次の連立時間発展方程式の形に表される．

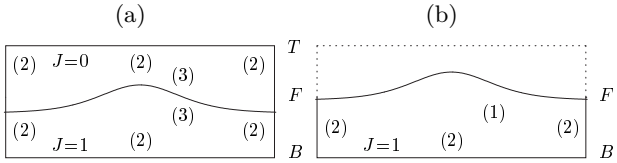
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}\left(t,\boldsymbol{z}(t)\right), \ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}\varphi\\ \boldsymbol{r}\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix}-S(\boldsymbol{r})/\rho\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

磁場から流体への作用は磁気応力差 T_N で取り込まれる [4,5]．T_N は，界面条件により流体真空両領域に共通な接線磁場 $h_{X,Y}$ と法線磁束密度 b_Z から決まる．流体と真空の透磁率を μ_1,μ_0 とすれば，界面磁場 $H=\sqrt{h_X^2+h_Y^2+\left(b_Z/\mu_1\right)^2}$ がある程度以上強くなると，磁性流体では飽和磁化のため，磁化 M が H に比例しなくなる (非線形磁化)．このとき磁気応力差は

$$T_\mathrm{N} = -\frac{\mu_0}{2}\left\{\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_0}\right)b_Z\right\}^2 - \mu_0\frac{M_S}{\gamma}\ln\left(\frac{\sinh\gamma H}{\gamma H}\right), \tag{4}$$

(χ_0：初期帯磁率, M_S：飽和磁化, $\gamma\equiv 3\chi_0/M_S$)

のように決まる [6,7]．すなわち，$\mu_1>\mu_0$ であれば T_N は負でありその大きさは H と共に増加する．



T : (2) $b_{Z0}=b_\mathrm{app}$
F : (3) $\phi_1=\phi_0$, $b_{Z1}=-b_{Z0}$
B : (2) $b_{Z1}=-b_\mathrm{app}$
Sides: (2) $b_{ZJ}=0$

F : (1) $\varphi=-\int_0^t \mathrm{d}t\ S/\rho$
B : (2) $v_\mathrm{n}=0$
Sides: (2) $v_\mathrm{n}=0$

Fig.2　Boundary conditions for (a) magnetic analysis and (b) fluid analysis. (∗) denotes category number of boundary conditions.

境界要素法により，磁場解析では磁気ポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 b_{ZJ} が，流体解析では流速ポテンシャル φ と法線流速 v_n が各境界で得られるが，方程式を解く際に既知あるいは未知とされる量に応じて，境界条件を次のように分類する．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\begin{cases}(1) & \phi_J \text{ が既知，} b_{ZJ} \text{ が未知，} & \text{(Dirichlet 条件)}\\ (2) & b_{ZJ} \text{ が既知，} \phi_J \text{ が未知，} & \text{(Neumann 条件)}\\ (3) & \phi_1{=}\phi_0{=}\phi,\ b_{Z1}{=}-b_{Z0}{=}b_Z. & \text{(界面条件)}\end{cases}$$

限られた離散点数でも，有限振幅の界面変形があっても透磁率差がない場合，流体下面 B と真空上面 T に印加した一様な $\boldsymbol{b}$ が界面 F 上の $\boldsymbol{b}$ に再現され，更に $\boldsymbol{v}$ も求めることができた (Fig. 3)[7,8].

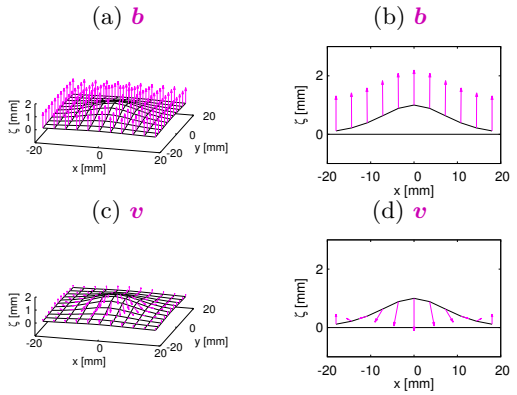


Fig.3 Calculated distribution of quantities on the interface (left column) or within the cross section at y=0 (right column) in case with interface elevation and without permeability difference.

3. 界面不安定化直前の時間発展解析

Fig. 4 で，界面中央での ζ,G,T_N,S,φ の時間変化を，印加磁束密度強度 b_app=4.0, 8.0, 12.0 [mT] について比較した．右軸と細い y=0 横直線は界面変位 ζ，左軸と太い y=0 横直線は ζ 以外の量に対するものである．b_app の増加と共に，S の中で負の T_N の寄与が優勢となり，S の変動の中心は負方向に移動する．これで，各量の振動周期が短くなり，更に界面の不安定化は早まる．Fig. 5 は，b_app=12.0 [mT] の不安定化直前での，ζ,S の時間変化 (1 行目) と ζ,$\boldsymbol{v}$(2 行目)，S(3 行目)，b_n(4 行目) の界面分布である．界面力学方程式の接線方向偏微分 $\rho\partial\boldsymbol{v}_t/\partial t|_{Z=\zeta} = -\nabla_\mathrm{t}S$ より，S の接線勾配が接線流速 $\boldsymbol{v}_t{=}\nabla_\mathrm{t}\varphi$ の起動力になる．b_n が界面中央付近で局所的に強まると，中央方向への起動力が生じる．ただし，その蓄積で生じる $\boldsymbol{v}_t$ が閉じた領域内で還流した後，少し遅れて界面中央の急上昇をもたらす．

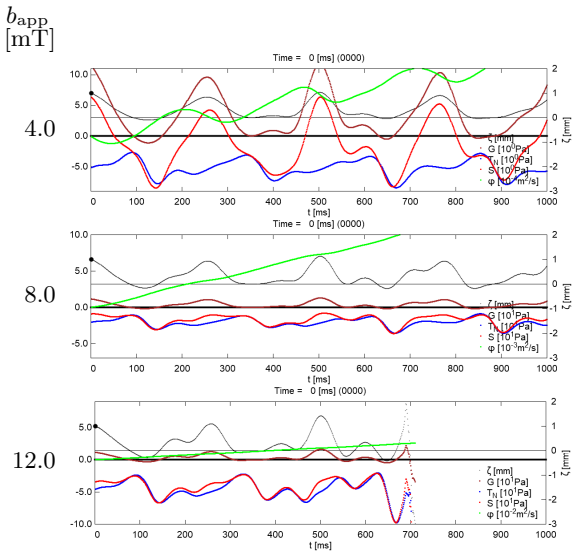


Fig.4 Time dependence of ζ, G, T_N, S and φ at the center of the interface.

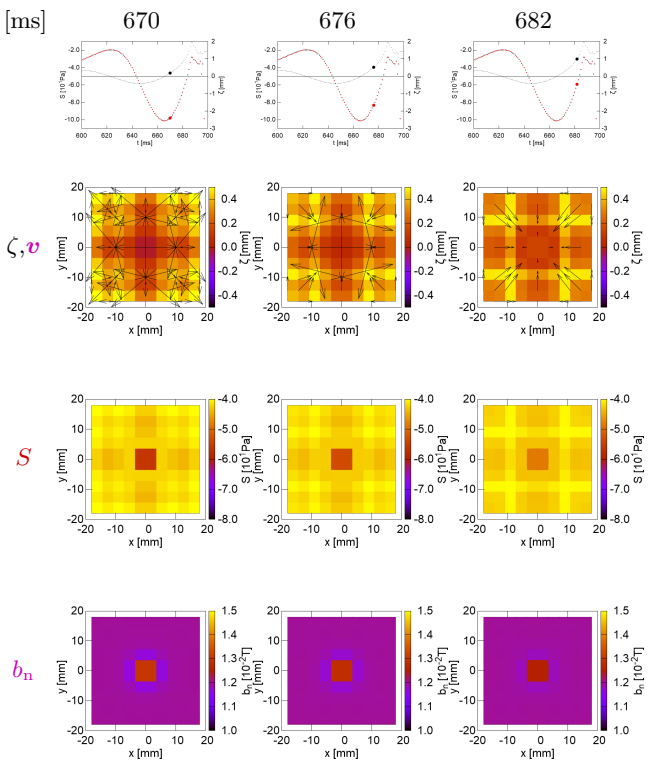


Fig.5 Distribution of ζ, S and b_n on the interface at time steps close to the destabilization for b_app = 12.0 [mT].

参考文献

1) Rosensweig, R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, (1985), Chap.4, Chap.5.
2) Brebbia, C.A. and Butterfield, R., "Formal equivalence of direct and indirect boundary element methods," *Applied Mathematical Modelling* **2**–2, (1978), pp.132–134.
3) Brebbia, C.A., F, J.C. Telles and C, L. Wrobel, *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer, (1984).
4) Mizuta, Y., "Numerical platform for the interface analysis of magnetic fluids by use of the Boundary Element Method," *J. Magn. Magn. Mater.* **514**, (2020), p.167118.
5) 水田　洋, "間接境界要素法に基づく磁性流体界面解析の検証," 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」**2153**, (2020), pp.81–95.
6) 水田　洋, "磁性流体界面解析へ境界要素法を適用するための課題," 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」**2286**, (2024), pp.64–73.
7) Mizuta, Y., "Interface analysis of magnetic fluids by the boundary element method considering multiplicity and singularity," *Engineering Analysis with Boundary Elements* **167**, (2024), p.105889.
8) 水田　洋, "多価性・特異性を考慮した境界要素法による磁性流体界面現象の時間発展解析," 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」**2330**, (2025), pp.22–31.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

境界要素法の係数行列対称性を利用した proxy 法に基づく高速直接解法の効率化

An efficient direct boundary elemant solver based on proxy methods utilizing symmetries of coefficient matrices

松本　安弘（東京科学大学 情報基盤センター）
丸山　泰蔵（東京科学大学 環境・社会理工学院）
Qianxiang Ma（理化学研究所 計算科学研究センター）
横田　理央（東京科学大学 総合研究院）
Yasuhiro Matsumoto, Center for Information Infrastructure, Institute of Science Tokyo
Taizo Maruyama, School of Environment and Society, Institute of Science Tokyo
Qianxiang Ma, RIKEN Center for Computational Science
Rio Yokota, Institute of Integrated Research, Institute of Science Tokyo
E-mail: matsumoto@cii.isct.ac.jp

The fast direct boundary element method for wave scattering can achieve nearly linear scaling. However, its scaling constant remains large. This study proposes an efficient formulation of the proxy-surface low-rank approximation technique specifically for transmission boundary conditions. By exploiting the symmetry of integral operators, we significantly reduce computational costs. This symmetry can be achieved not only in the standard Symmetric Galerkin BEM but also in the Nyström method by restricting local integration corrections to a single point and appropriately scaling the rows of the coefficient matrix. Numerical results demonstrate that this symmetric formulation is 1.5 times faster than the conventional approach.

1. はじめに

波動散乱問題は重要な物理・工学応用が多く存在する．特に非有界領域上で無限遠方への波動散乱を考慮するときには境界要素法が有望である．境界要素法は例えば三次元領域内で偏微分方程式を解く問題を，その境界である二次元曲面上で問題を解くことに定式化でき，また種々の高速解法と組み合わせることでできるため，大規模問題の数値解法として適している．本研究では高速解法の中でも，特に高速直接解法と呼ばれる手法に注目する[1)]．これまでに多くの境界要素法の高速直接解法が提案されてきている[2)–4)]．これらは低周波域や散乱体が細長い形状場合などの特定の条件下で，離散化方程式の自由度の増加に対してほぼ線型の計算効率を持つものもある．一方で，その線型（時間）スケーリングのアルゴリズムのスケーリング定数は比較的大きいことが知られている．この問題は反復型の高速解法である高速多重極法[5)] でも共通しており，例えば Krylov 部分空間法の反復回数が減少するような優れた境界積分方程式の探究が行われている[6),7)]．解法に適した積分方程式を用いることは高速直接解法においても有効である．著者らはこれまでに，Burton–Miller 型の定式化[8)] やその直接・間接型混合定式化[9)] により高速直接解法の計算効率を高められることを確認してきた．

本研究では，transmission 条件を課された波動散乱問題において，境界積分方程式が対称性を有するよう定式化・離散化をすることにより，proxy 法を用いた低ランク近似[10)] を効率化する手法を提案する．境界積分方程式の対称定式化は Galerkin 法による離散化がよく知られているが，適切な数値積分公式と係数スケーリングにより，Nyström 法による離散化でも実行可能であることを指摘する．数値計算により，対称性を用いた低ランク近似の効率化は音響散乱と弾性波散乱のどちらでも可能であることを実証する．また対称性を用いた高速直接解法では愚直な定式化に比較して概ね 1.5 倍の高速化が確認された．

2. 境界積分方程式

定式化においては，主に音響散乱に対応する Helmholtz transmission 問題の例を議論する．同様の考え方により弾性波 transmission 問題も定式化できる．G_k を波数 k の（2 次元）Helmholtz 方程式の基本解とする．このとき，x, y を境界上のある固定された点とすると，基本解とその法線微分には次の対称性があることが知られている．

$$G_k(x,y) = G_k(y,x) \tag{1}$$

$$\frac{\partial G_k(x,y)}{\partial n(y)} = \frac{\partial G_k(y,x)}{\partial n(y)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 G_k(x,y)}{\partial n(x)\partial n(y)} = \frac{\partial^2 G_k(y,x)}{\partial n(y)\partial n(x)} \tag{3}$$

この関係を利用し，離散化後の線型方程式の係数行列を対称化する．$S_k v$ を境界 Γ に関する一重層ポテンシャルとする．ここに v は Γ 上の適当な関数である．まず境界を θ によりパラメータ表示する．

$$S_k v(x) = \int_\Gamma G_k(x,y)\, v(y)\, ds(y) \tag{4}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} G_k(x, y(\theta))\, v(y(\theta))\, |y'(\theta)|\, d\theta \tag{5}$$

上式を N 点の台形則で離散化する．$y_j := y(\theta_j)$ はパラメータ空間上で等間隔に置かれた j 番目の積分点 θ_j に対応する境界上の点であり，また $\tilde{G}$ は局所修正された基本解である．

$$S_k v(x_i) \approx \sum_j \tilde{G}_k(x_i, y_j)\, v(y_j)\, w_j \tag{6}$$

ここに，$w_j = |y_j'| \frac{2\pi j}{N}$ は台形則の重みである．上式から形成される係数行列を列だけでなく行に対しても重みでスケーリングすることで得られる係数行列

$$[A]_{ij} := w_i \tilde{G}_k(x_i, y_j)\, w_j \tag{7}$$

は，もし $\tilde{G}(x_i, y_j)$ が対称であれば対称となる．一般に局所

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

修正は対称ではないが，対角項のみ修正する手法[11] を用いることで，Nyström 法であっても係数行列を対称にすることができる．

Helmholtz transmission 問題に対応する積分方程式としては次に示す PMCHWT 定式化がよく知られている．

$$\begin{pmatrix} -\left(\varepsilon_0 S_{k_0} + \varepsilon_1 S_{k_1}\right) & D_{k_0} + D_{k_1} \\ \left(D^*_{k_0} + D^*_{k_1}\right) & -\left(\frac{1}{\varepsilon_0} N_{k_0} + \frac{1}{\varepsilon_1} N_{k_1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^I \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial u^I}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここに，$D_k v$ は二重層ポテンシャルであり，$D^*_k v$ と $N_k v$ は一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャルの法線微分である．本研究では次に示す Müller-like 定式化も用いる．

$$\begin{pmatrix} -\left(\varepsilon_0^2 S_{k_0} - \varepsilon_1^2 S_{k_1}\right) & \varepsilon_0\left(D_{k_0} - \frac{1}{2}\right) \\ & -\varepsilon_1\left(D_{k_1} + \frac{1}{2}\right) \\ \varepsilon_0\left(D^*_{k_0} + \frac{1}{2}\right) & \\ & -\left(N_{k_0} - N_{k_1}\right) \\ -\varepsilon_1\left(D^*_{k_1} - \frac{1}{2}\right) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_0 u^I \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial u^I}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

この定式化は高々弱特異までの積分核のみで記述できているが Fredholm 第二種ではないため，反復型解法には適さないが，対称性を利用できるため高速直接解法では効果的である．

3. 高速直接解法

全体の係数行列を A とし，空間的に近い行列エントリ同士が行列内のインデックスの意味でも近くなるように並び替えをした上でブロック化する．このとき，対角ブロックを D とすると，次のように非対角ブロックを低ランク近似できる．

$$A \approx D + URV \quad (10)$$

このような低ランク近似は proxy 法により実行でき，R はいわゆるスケルトン，U および V はスケルトンを補間して元の係数行列を復元する補間パラメータである．いま，境界積分方程式を対称化しているため，実は

$$U = V^T \quad (11)$$

の関係が成り立っており，よって

$$A \approx D + V^T RV \quad (12)$$

と分解できる．この分解に基づき高速直接解法を構成できる．高速直接解法は既往研究[9] で用いたものと同様であるため詳細は省略する．

4. 数値計算

紙面の都合から弾性波散乱による高速化のみ示す．入射波として縦波平面波を用い，介在物として四角形を用いる．外部領域の密度，縦波速度，横浪速度をそれぞれ $1, \sqrt{3}, 1$ とする．同様に内側領域の密度，縦波速度，横浪速度をそれぞれ $2, 3, 1.5$ とする．PMCHWT 定式化の積分方程式を用い，Galerkin 法で離散化した．数値計算には TSUBAME4.0 の計算ノードを 8 台使用した．Fig. 1 に対称化した定式化による速度向上を示す．提案手法は Burton–Miller 型定式化よりも速く，また愚直な方法よりも約 1.5 倍高速であることがわかる．

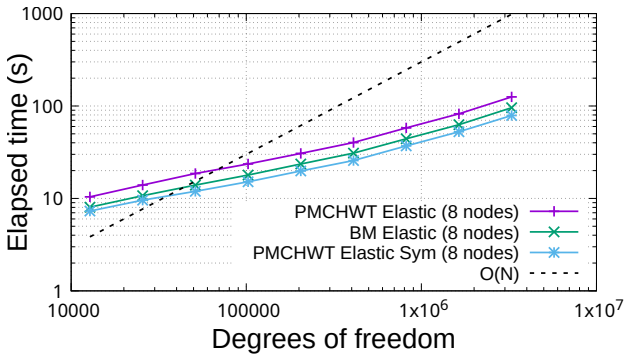


Fig. 1 Speedup of symmetic formulation in elastic wave scattering.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 (24K20783) および JHPCN (jh250045, jh250070) の支援を受けた．

参考文献

1) Per-Gunnar Martinsson. *Fast Direct Solvers for Elliptic PDEs*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2019.
2) Per-Gunnar Martinsson and Vladimir Rokhlin. A fast direct solver for scattering problems involving elongated structures. *Journal of Computational Physics*, Vol. 221, No. 1, pp. 288–302, 2007.
3) Daria Sushnikova, Leslie Greengard, Michael O'Neil, and Manas Rachh. FMM-LU: A fast direct solver for multiscale boundary integral equations in three dimensions. *Multiscale Modeling & Simulation*, Vol. 21, No. 4, pp. 1570–1601, 2023.
4) Yasuhiro Matsumoto and Taizo Maruyama. Linearly scalable fast direct solver based on proxy surface method for two-dimensional elastic wave scattering by cavity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 173, p. 106148, 2025.
5) Vladimir Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *Journal of Computational physics*, Vol. 86, No. 2, pp. 414–439, 1990.
6) RE Kleinman and PA Martin. On single integral equations for the transmission problem of acoustics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 48, No. 2, pp. 307–325, 1988.
7) Kazuki Niino and Naoshi Nishimura. Preconditioning based on Calderon's formulae for periodic fast multipole methods for Helmholtz' equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 1, pp. 66–81, 2012.
8) Yasuhiro Matsumoto and Taizo Maruyama. A fast direct solver for two-dimensional transmission problems of elastic waves. *Engineering with computers*, 2026 (Accepted).
9) Yasuhiro Matsumoto and Kei Matsushima. Efficient lu factorization exploiting direct-indirect burton-miller equation for helmholtz transmission problems. *arXiv preprint arXiv:2512.14193*, 2025.
10) P.G. Martinsson and V. Rokhlin. A fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 205, No. 1, pp. 1–23, 2005.
11) Bowei Wu and Per-Gunnar Martinsson. Zeta correction: a new approach to constructing corrected trapezoidal quadrature rules for singular integral operators. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 47, No. 3, p. 45, 2021.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

有限階作用素による境界積分方程式の安定化について
On the Stabilization of Boundary Integral Equations Based on Finite-rank Augmentation

松島　慶（広島大・情）
Kei MATSUSHIMA, Hiroshima University
E-mail: matsushima@acs.hiroshima-u.ac.jp

In this study, we discuss the stability of solutions to boundary integral equations for boundary value problems of the Helmholtz equation with respect to variations in parameters. Many boundary value problems for such elliptic partial differential equations can be equivalently reformulated as boundary integral equations whose kernels are given by fundamental solutions or Green's functions. However, the well-posedness of the original boundary value problem does not necessarily imply the well-posedness of the corresponding boundary integral equation. In other words, under certain conditions, the solvability may fail, or continuity of the solution with respect to parameter changes may not hold. We show, through a numerical example, that these difficulties can be resolved by introducing suitable finite-rank operators.

1. 緒言

多くの線形楕円型方程式の境界値問題は、基本解や Green 関数を核とする境界積分方程式に等価に置き換えることができる。これは、境界要素法や境界積分方程式法などの数値計算手法の基盤であり、これらの手法に関連した数多くの理論・アルゴリズムの研究が行われている[1)]。

多くの場合、数値計算が対象とする境界値問題は良設定であることが保証されている。すなわち、厳密解が一意に存在し、かつデータに対して解が連続的に変化する。しかし、境界値問題が良設定であることは必ずしも対応する境界積分方程式も良設定であることを意味しない。すなわち、特定の条件下で一意可解性が保証されない、あるいは解のパラメータ変動に対する連続性が成り立たない可能性がある。本講演は、Helmholtz 方程式の境界値問題に関する境界積分方程式の解のパラメータ変動に対する安定性について議論する。特に、簡単な例題について有限階作用素の導入によってこの問題が解決できることを示す。

2. 定式化

2.1. Helmholtz 方程式の外部 Dirichlet 問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界な開部分集合として、その境界 $\partial\Omega$ は $C^{1,\alpha}$ 級 ($\alpha \in (0,1]$) かつ補領域 $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ は連結であるとする。与えられた $g \in C(\partial\Omega)$ と $k > 0$ に関して、次の境界値問題を満たす $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ について考える。

$$(P_k) \quad \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \\ u \text{ satisfies the Sommerfeld radiation condition} \end{cases}$$

この問題 (P_k) はすべての $k > 0$ で一意可解であることが知られている[2)]。また、その解は次の層ポテンシャルによって表示できる。

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G_k}{\partial \nu(y)}(x,y) - \mathrm{i}\eta G_k(x,y) \right) \varphi(y) \mathrm{d}s(y)$$

ここに、$G_k(x,y) = (\mathrm{i}/4) H_0^{(1)}(k|x-y|)$ は基本解であり、$\varphi \in C(\partial\Omega)$ は次の境界積分方程式の一意の解である。

$$(Q_k) \quad (I + D_k - \mathrm{i}\eta S_k)\varphi = 2g$$

$\eta > 0$ は任意の定数であり、境界積分作用素 S_k, $D_k : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ は次式で定義される。

$$(S_k\psi)(x) := 2\int_{\partial\Omega} G_k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}s(y)$$

$$(D_k\psi)(x) := 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_k}{\partial \nu(y)}(x,y)\psi(y)\mathrm{d}s(y)$$

2.2. 低周波破綻と有限階作用素による修正

周波数から基本解への写像 $k \mapsto G_k$ は $k > 0$ において適当な位相に関して連続であるが、この対応を $k = 0$ で連続に拡張することは困難である。これは、G_k が滑らかな関数 $R_k(x,y)$ を用いて次のように分解できることから明らかである。

$$G_k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \log k + R_k(x,y) \qquad (1)$$

したがって、$k > 0$ で定義された境界積分作用素 S_k と D_k を作用素ノルム位相で $k = 0$ に連続に拡張することができず、(Q_k) の数値計算スキームは $k = 0$ の近傍で不安定になることが予想される。

この考察は、境界値問題 (P_k) の解が $k = 0$ に拡張できないことを意味しない。実際、式 (1) より $k = 0$ で特異となる項は $1/(2\pi)\log k$ のみであり、これは定数関数であるから

$$(-\Delta - k^2)\frac{1}{2\pi}\log k \xrightarrow[k\to 0_+]{} 0 \quad \text{uniformly in } \mathbb{R}^2$$

が成り立つ。さらに、任意の $k > 0$ について

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G_k}{\partial \nu(y)}(x,y) - \mathrm{i}\eta G_k(x,y) - \frac{\mathrm{i}\eta}{2\pi}\log k \right) \varphi(y)\mathrm{d}s(y) + c \qquad (2)$$

は $(\varphi, c) \in C(\partial\Omega) \times \mathbb{C}$ が次式を満たすとき Helmholtz 方程式 $(-\Delta - k^2)u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ の解である。

$$c - \frac{\mathrm{i}\eta}{2\pi}\log k \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\mathrm{d}s(y) = 0$$

一重層、二重層ポテンシャルの跳躍公式より、$(\varphi, c) \in C(\partial\Omega) \times \mathbb{C}$ が次の方程式の解であれば式 (2) で与えられる $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$ は $u \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ であり、また $u = g$ on $\partial\Omega$ を満たす。

$$(Q_k') \quad \begin{bmatrix} I + A_k & 1 \\ J & -\pi/(\mathrm{i}\eta \log k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここに、$A_k : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ および $J : C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}$ は次式で定義される。

$$(A_k\psi)(x) := 2\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G_k}{\partial \nu(y)}(x,y) - \mathrm{i}\eta G_k(x,y) - \frac{\mathrm{i}\eta}{2\pi}\log k \right) \psi(y)\mathrm{d}s(y)$$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

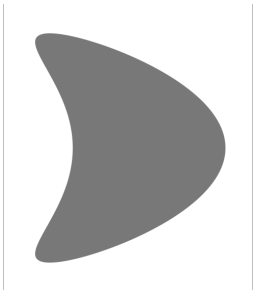


Fig. 1　Kite-like obstacle Ω.

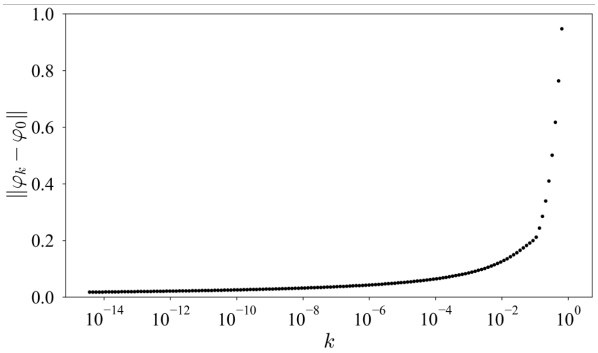


Fig. 2　Variation $\|\varphi_k - \varphi_0\|$ versus k.

$$J\psi := \int_{\partial\Omega} \psi(y)\mathrm{d}s(y)$$

$k > 0$ かつ (φ, c) を (Q'_k) の解とすると、この φ は (Q_k) の解である。反対に、$k > 0$ かつ φ を (Q_k) の解とすると、

$$c := \frac{\mathrm{i}\eta}{2\pi} \log k \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\mathrm{d}s(y)$$

で定められる (φ, c) は (Q'_k) の解である。この意味で、(Q_k) と (Q'_k) は特に $k > 0$ のとき等価である。一方で、(Q'_k) 左辺の 2×2 に並べられた作用素は $k \to 0_+$ でノルム位相で連続に拡張できることが期待できる。

3. 数値例

Fig. 1 に示す形状の Ω について、$g(x) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}$ で与えた際に積分方程式 (Q'_k) の近似解を Nyström 法[1] で計算した結果を示す。

φ_0 および 0 付近の k で計算された φ_k について、その差の一様ノルム $\|\varphi_k - \varphi_0\|$ を計算した結果を Fig. 2 に示す。この結果から、(Q'_k) の近似解は非常に小さい $k > 0$ についても数値安定的に計算可能であることが示唆される。

4. 結言

本研究は、2 次元 Helmholtz 方程式の Dirichlet 問題を対象として、その低周波極限において数値安定な境界積分方程式を立式した。数値計算結果から、提案された積分方程式の Nyström 法による離散化は、非常に小さい周波数においても数値安定であることが確認された。

参考文献

1) R. Kress: Linear Integral Equations, Third edition, 2014.
2) D. Colton and R. Kress: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Fourth edition, 2019.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

フォトンのスピンを考慮した電磁波の境界要素法
Boundary Element Method for Electromagnetic Waves with Photon Spin

植田　毅（慈恵医大・学情セ）
Tsuyoshi UETA, The Jikei University School of Medicine
E-mail: tsuyoshi_ueta@jikei.ac.jp

Employing a linear sum of the electric field (real part) and the magnetic field (imaginary part) as the dependent variable, Maxwell's equations become the equation of first order differentials in both time and space like the Dirac equation for a massless particle. In this study, we attempt to develop a boundary element method for the steady state of this equation.

１．はじめに

電磁波の数値計算をするときは，電場と磁場を従属変数として Maxwell 方程式を連立して解くか，Maxwell 方程式を統合して電場か磁場の波動方程式（散逸がある場合は電信方程式）として解く．後者の場合，元々時間についても空間についても１階の微分方程式である Maxwell 方程式を時間，空間ともに２階の微分方程式として解くことになる．

電磁場の波動方程式は，相対論的な分散関係

$$E=\sqrt{(mc^2)^2+(c\boldsymbol{p})^2} \tag{1}$$

(m, c, $\boldsymbol{p}$はそれぞれ、物体の質量，光速，運動量)を量子化することに依っても得られる．それは，クライン-ゴルドン方程式において質量を 0 としたものに他ならない．この導出過程では分散関係の平方根を除くために，エネルギー(時間微分)及びハミルトニアン(運動量と座標で書いた力学的エネルギー)を2乗(演算子としては2回演算)する．この過程が情報欠落の原因となる．相対論的な分散関係の量子化においては，物質(確率，エネルギー)保存則を満たさせるため，時間に関して1階の微分方程式であることを要求し，量子化することも可能である．それがディラックの量子化であり，そこから，電子の負のエネルギー状態，スピンが自然と導出される．ディラック型の方程式は時間，空間ともに1階の微分方程式である．光子をこのように量子化することも可能で，得られる方程式は Maxwell 方程式そのものになる．電子などの粒子場，電磁場ともに本質的に空間に関して1階の微分方程式である [1]．本研究では，この定常問題を2階の微分方程式を介することなく，境界積分方程式化し，安定に解が得られる境界要素法が構築できるか試みる．

２．統合 Maxwell 方程式 [2]

電場 $\boldsymbol{E}$ を実部，磁場 $\boldsymbol{H}$ を虚部として線形結合した場

$$\boldsymbol{\psi}=\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{E}+i\sqrt{\mu}\boldsymbol{H} \tag{2}$$

を導入する．ここで，ε，μはそれぞれ，その場の誘電率および透磁率である．場$\boldsymbol{\psi}$を用いると，Maxwell 方程式は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}=i\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t} \tag{3}$$

と書ける．

ここで，３つの 3×3 の行列

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{4}$$

を定義し，ベクトル$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$として，ハミルトニアン

$$\mathcal{H}\equiv c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \tag{5}$$

を$\boldsymbol{p}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$のように量子化すると，

$$\frac{\mathcal{H}}{c\hbar}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}(-i\partial_x)+\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}(-i\partial_y)+\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}(-i\partial_z)$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\partial_x\\0&\partial_x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\partial_y\\0&0&0\\-\partial_y&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\partial_z&0\\\partial_z&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-\partial_z&\partial_y\\\partial_z&0&-\partial_x\\-\partial_y&\partial_x&0\end{pmatrix}$$

となり，式(3)は

$$i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\psi}=\mathcal{H}\boldsymbol{\psi} \tag{6}$$

のように，ディラック方程式のような形に書き変えられる．

この定式化において，$\hbar\boldsymbol{\sigma}$は大きさ$\hbar$の光子のスピンを表し、

$$\rho\equiv\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^\dagger\boldsymbol{\psi} \tag{7}$$

は電磁場のエネルギー密度を表し、

$$\boldsymbol{j}=\frac{c}{2}\boldsymbol{\psi}^\dagger\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\psi}=-i\frac{c}{2}\boldsymbol{\psi}^*\times\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{8}$$

はポインティングベクトルである。このとき、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} \tag{9}$$

のように連続の式が成り立ち，エネルギー保存則が満たされる。同様にスピンを含めた角運動量の保存則も示される。

３．定常問題

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} \tag{10}$$

のように，定常問題

$$\hbar\omega\boldsymbol{\phi}=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\phi}$$

つまり，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\phi}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\phi} \tag{11}$$

を解く問題を考える．

４．積分方程式

$k=\omega/c$として，グリーン関数

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i G_{jl}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-kG_{kl}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{kl} \tag{12}$$

を用いると，ある閉曲面内において，式(11)を満たす場$\boldsymbol{\phi}$は

$$\phi_l=\int\varepsilon_{ijk}G_{il}\phi_j n_k dS'=\int(\boldsymbol{G}_l\times\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{n}dS' \tag{13}$$

のように境界積分を用いて表すことができる．この積分表現にはグリーン関数G_{kl}，場の量ϕ_jともに空間微分を伴わないことが特徴である．これは1階の微分方程式を直接積分表現したことによる．

式(12)を満たすグリーン関数は [3]

$$G_{kl}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left(\delta_{kl} + \frac{1}{k^2}\partial_k\partial_l\right) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{14}$$
$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

のように陽に与えられる。

５．境界条件

式(13)左辺の被積分関数は

$$(\boldsymbol{G}_l \times \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{G}_l$$

のように変形できるから，境界積分において場$\boldsymbol{\phi}$は接線成分のみが現れる。

フォトニック結晶のように，透磁率は一定で誘電率のみ変化する界面を考える．空間には電荷も電流もないものとする．
一方の領域の誘電率をε_1、場を$\boldsymbol{\phi}_1$，もう一方の領域の誘電率と場をε_2，$\boldsymbol{\phi}_2$とすると，界面での境界条件は

$$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$
$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

であるから，場$\boldsymbol{\phi}$を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(\boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\phi}_1^*) \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}(\boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\phi}_2^*) \times \boldsymbol{n} \tag{17}$$
$$(\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_1^*) \times \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\phi}_2 - \boldsymbol{\phi}_2^*) \times \boldsymbol{n} \tag{18}$$

と表せる。

６．まとめ

Maxwell 方程式から，閉曲面内の場を境界上の場とグリーン関数の境界積分により表す定式化を行った．この境界積分の被積分関数には，場とグリーン関数の微分を含んでおらず，場の微係数の離散化において誤差が増大する一般的な境界要素法よりも有利な定式化であると考えられる．しかしながら，ディアディックグリーン関数そのものに２階微分を含んでおり，方程式そのものは超特異性を含む．

このような形式には，Clifford 代数を用いて，ディラック方程式までも含んだ定式化を行っている例がある [4,5,6]．方程式そのものには大きなアドバンテージがあると考えられるが，この定式化がフォトニック，フォノニックなメタマテリアルの解析に用いられた例はない．

本研究では，超特異性の克服と境界要素法として数値計算上の特性を調べる．

参考文献

1) A. Tip, Linear absorptive dielectrics, Phys. Rev. A, 57, pp.4818-4841, 1998.
2) Philip R. Wallace: Mathematical Analysis of Physical Problems, (Dover, New York, 1972) p.288-291.
3) Kazuo Ohtaka, Tsuyoshi Ueta and Katsuki Amemiya: Calculation of photonic bands using vector cylindrical waves and reflectivity of light for an array of dielectric rods, Phys. Rev. B, 57, pp.2550-2568, 1998.
4) A. Chantaveerod, A. D. Seagar and T. Angkaew: Calculation of Electromagnetic Field with Integral Equation Based on Clifford Algebra, PIERS Proceedings, August 27-30, Prague, Czech Republic, pp.62-71, 2007.
5) Alan McIntosh: Clifford Algebras and the Higher Dimensional Cauchy Integral, Approximation and Function Spaces Banach Center Publications, 22, pp.253-267 (PWN Polish Scientific Publishers, 1989, Warsaw).
6) Alan McIntosh and Marius Mitrea: Clifford Algebras and Maxwell's Equations in Lipschitz Domains, Math. Meth. Appl. Sci., 22, pp.1599-1620, 1999.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-04：能動的流体制御）

2026年5月16日(土) 16:25 ~ 17:10 | D会場(環境棟：5階講義室)

OS-04 (1)

座長:深潟 康二(慶應義塾大学)

16:25 ~ 16:40

[14015] 表面帯電がLinear Plasma Synthetic Jet Actuatorの電気流体作用に与える影響

*石井 悠貴[1]、小室 淳史[2]、大友 衆示[1]、西田 浩之[1] (1. 東京農工大学、2. 産業技術総合研究所)

16:40 ~ 16:55

[14016] スパースプロセッシングPIVとプラズマアクチュエータを用いた翼周り剥離流れのリアルタイムフィードバック流体制御

*野々村 拓[1]、ビゲラ ロドリゴ[2] (1. 名古屋大学、2. 東北大学)

16:55 ~ 17:10

[14017] 進行波壁面による乱流抵抗低減制御 ― 実験研究の進展と力学機構の解明 ―

*岩本 薫[1] (1. 東京農工大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

表面帯電が Linear Plasma Synthetic Jet Actuator の電気流体作用に与える影響
Effect of Surface Charging on the Electrohydrodynamic Effect in Linear Plasma Synthetic Jet Actuator

石井　悠貴（農工大・工）　小室　淳史（産総研）　大友　衆示（農工大・工）　西田　浩之（農工大・工）
Yuki ISHII, Tokyo University of Agriculture and Technology
Atsushi KOMURO, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology
Shūji ŌTOMO, Tokyo University of Agriculture and Technology
Hiroyuki NISHIDA, Tokyo University of Agriculture and Technology
E-mail: yuki@st.go.tuat.ac.jp

To reduce aerodynamic drag in mobility applications, Linear Plasma Synthetic Jet Actuator (LPSJA) has attracted significant attention. However, its induced flow exhibits complex flow characteristics depending on voltage conditions and electrode distance λ. In this study, we focus on variations in surface charge of LPSJA to investigate the underlying flow mechanism. Particularly, we conducted phase-resolved flow field measurements and time-resolved surface potential distribution measurements. The results revealed that increased surface charge enhances the electric field, promoting flow acceleration. Conversely, the collision of flows generates a counter-pressure gradient that decelerates the flow. These findings indicate that the LPSJA flow field is determined by the balance between electric field enhancement and fluid interference.

1. はじめに

モビリティの抵抗低減による環境負荷の抑制に向け，プラズマアクチュエータ(PA, Fig. 1(a))を用いた流体制御技術が注目を集めている．PA は誘電体を 2 枚の電極で挟んだ簡易な構造を有し，高速応答性に優れる．PA は電極間に交流高電圧を印加することで駆動し，放電に伴うプラズマを生成する．このプラズマ中の荷電粒子が電界により加速され，大気中の中性粒子と運動量交換衝突することで体積力を生じ，能動的に流れを制御する．この PA の設計コンセプトの一つに，複数の PA を列状に集積した Linear Plasma Synthetic Jet Actuator(LPSJA, Fig. 1(b))が存在する．複数の PA を集積することで，より広範囲に，より自由度の高い流れ制御を行うことができる．しかし，LPSJA の課題として，電圧条件や集積間隔 λ に応じて体積力および付随するイオン風が複雑に変化することが挙げられる [1]．この変化の物理メカニズムは未だ十分に解明されておらず，実用化に向けた高精度な流れ制御を実現するためには，その詳細な解明が不可欠である．

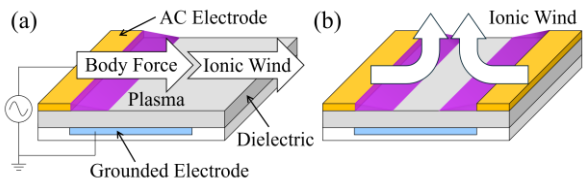


Fig. 1 Schematic of (a) PA and (b) LPSJA.

本研究の最終目標は，LPSJA におけるイオン風の変化メカニズムを解明することである．本発表では，その第一段階として，電界変化を通じて PA の駆動特性に多大な影響を及ぼす [2]誘電体表面の帯電に着目する．具体的には，電圧位相変化に同期した高時間分解での流速場および電位分布の計測結果を比較することで，帯電特性の変化が LPSJA のイオン風に及ぼす影響の解明を図る．

2. 研究手法

LPSJA は 1 枚の誘電体を挟む 2 枚の AC 電極および 1 枚の接地電極で構成される．本研究では，誘電体に 1 mm 厚 BGO，AC 電極に鋸歯状に整形した 35 μm 厚銅テープ，接地電極に ITO 膜を用いた．流速場計測には粒子画像流速測定法(PIV)，表面電位分布計測にはポッケルス計測法 [3]を用いた．流速場計測は 1 周期を 40 分割した 9°ごとの位相平均場計測とし，表面電位分布計測は特定の 6 位相(0°, 45°, 90°, 180°, 225°, 270°)における瞬時場計測として実施した．LPSJA の印加電圧条件は，周波数 5 kHz，電圧 10 kV_{pp} の正弦波とした．LPSJA における AC 電極の集積間隔 λ は 8 mm とし，LPSJA の実験結果と単体 PA(Single PA)の結果を比較することで，集積化に伴う帯電特性の変化がイオン風に及ぼす影響を調査した．

3. 結果

LPSJA($\lambda = 8$ mm)の流れ場の例を Fig. 2(a)に示す．2 つの電極から生じたイオン風は水平方向(x 方向)に進行した後，中央部で衝突し，垂直方向(y 方向)に偏向する．この流れ場における x 方向最大流速 u_{max}(Fig. 2(a)内赤色プロット部)の時間変化を Fig. 2(b)に示す．灰色の実線に印加電圧波形，水色の実線に放電電流波形を示す．赤色のプロットに Single PA の結果を，緑色のプロットに $\lambda = 8$ mm の結果を示す．これらの結果から，Single PA および $\lambda = 8$ mm のいずれにおいても，位相 0°付近で流速の減速傾向，180°以降に加速傾向が確認された．また，両者を詳細に比較すると，$\lambda = 8$ mm の方が加減速の変化量が大きく，かつ流速が変化し始める位相が速い傾向にある．この差異が生じる原因について，表面電位分布の観点から考察する．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

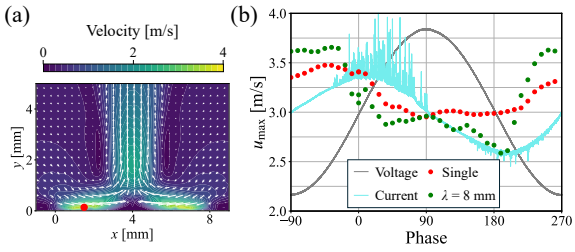


Fig. 2 (a) Spatial coordinates and (b) temporal evolution of the maximum flow velocity u_{max} in the x-direction.

表面電位分布の計測結果を Fig. 3 に示す. (a)は位相 0°, (b)は位相 180°の結果であり，電圧印加直後 66 周期目から 99 周期目までの結果を位相平均している．上段は Single PA，下段は $\lambda = 8$ mm の結果である．また，この電位分布から算出した x 方向の電位・電界プロファイルを Fig. 4, 5 に示す．$x = 0$ mm を電極先端座標とし，集積間隔 λ の半分に相当する $x = 4$ mm までの範囲を示す．PA の駆動過程において, 印加電圧の正勾配区間では正電界が, 負勾配区間では負電界がそれぞれプラズマ中のイオンを加速することで体積力を生じる．したがって，位相 0°では電界が正，180°では負であるほど電界が強化されていると考える. Fig. 5 を確認すると, 0°, 180°のいずれも, Single PA と比較して $\lambda = 8$ mm で電界が強化されている．これは，LPSJA において対向する電極から進展した放電が近接し, 表面帯電量が増大したためと考えられる. この電界強化が $\lambda = 8$ mm において流速の加速量が増大し，加速タイミングが先行した要因である．したがって，PA の集積化は表面帯電の増大を誘起し，電界の強化を介してイオン風生成を促進するといえる．

一方で，位相 0° においては，電界が強化されているにもかかわらず $\lambda = 8$ mm での減速傾向が顕著であった．この要因として，イオン風の衝突に伴う圧力勾配の影響および放電形態の相違が挙げられる．Fig. 2(a)の流速場に着目すると，イオン風の衝突部である $x = 4$ mm 付近に低流速領域が存在する. これは, 対向するイオン風の衝突によって生じた局所的な高圧領域である. この高圧領域は, 電極から進行するイオン風に対して逆方向の圧力勾配を形成する．また一般に，PA の駆動過程において，正勾配区間では進展距離の長いストリーマ放電が，負勾配区間では拡散的なグロー放電が生じる. そして, 体積力生成への寄与はグロー放電区間が支配的であり，正勾配区間での体積力は相対的に弱いと報告されている [4]．したがって，正勾配区間では，電界強化による体積力促進効果が圧力勾配の減速効果を下回り，結果として減速効果が強くなったと考えられる．

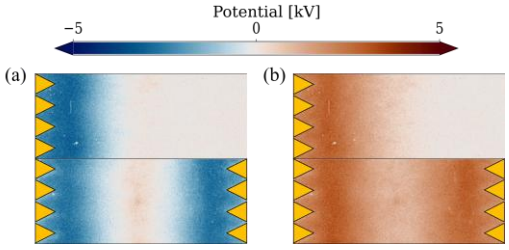


Fig. 3 Time-averaged surface potential distribution at phase (a) 0° and (b) 180°.

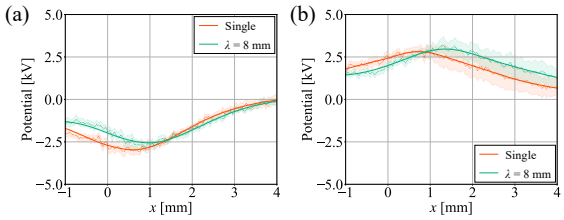


Fig. 4 x-direction surface potential profile at phase (a) 0° and (b) 180°.

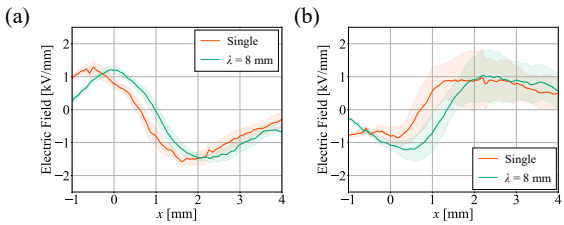


Fig. 5 x-direction electric field profile at phase (a) 0° and (b) 180°.

4. 結言

LPSJA の誘起流変化メカニズムを解明するため，表面帯電に着目した実験的調査を行った. その結果, LPSJA では表面帯電量の増大に伴う電界強化によって，イオン風の加速が促進されることが明らかとなった. 一方で, イオン風の衝突に起因する圧力勾配が減速効果として作用することも確認された．以上より，最終的な LPSJA の流れ場は，これら電界強化による加速と圧力勾配による減速のバランスによって決定されることが示された.

参考文献

1) Michael Wicks, Flint O. Thomas, Thomas C. Corke, Mehul Patel and Alan B. Cain, Mechanism of Vorticity Generation in Plasma Streamwise Vortex Generators, AIAA J. 53 (2015).
2) S. Sato, N. Ohnishi, Role of surface discharge dynamics in the generation of electrohydrodynamic force: toward performance improvement of dielectric barrier discharge plasma actuators, J. Phys. D Appl. Phys. 58 (2025).
3) T. Uemura, H. Nishida, R. Ono and A. Komuro, Effect of nitrogen/oxygen ratios on surface charge distributions generated by repetitive surface dielectric barrier discharges. Plasma Sources Sci. Technol., 33 (2024).
4) N. Benard, E. Moreau, Electrical and mechanical characteristics of surface AC dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control, Exp. Fluids 55 (2014).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

スパースプロセッシング PIV とプラズマアクチュエータを用いた翼周り剥離流れのリアルタイムフィードバック流体制御

Real-time Feedback Control of Separated Flow around airfoil Using Sparse Processing PIV and Plasma Actuators

野々村 拓（名古屋大学）　ロドリゴ ビゲラ（東北大学）
Taku NONOMURA, Nagoya University
Rodrigo VIGUERA, Tohoku University
E-mail: nonomura@nagoya-u.jp

Real-time feedback flow control requires rapid observation of the flow field. Plasma actuators (PAs) are promising devices for active flow control because of their fast response and ease of installation. In this study, real-time feedback control of separated flow around an airfoil is demonstrated using sparse processing particle image velocimetry (SPPIV) and plasma actuators. SPPIV reconstructs the velocity field by estimating proper orthogonal decomposition (POD) modes from sparsely sampled PIV measurements, enabling real-time flow-field estimation. Wind-tunnel experiments were conducted using a NACA0015 airfoil equipped with plasma actuators. Several control strategies were tested, including predetermined burst actuation, linear-model-based single-step prediction (SSP), multi-step prediction (MSP), and an adaptive control pattern (ACP) proposed in this study. The ACP method adjusts the burst actuation frequency according to the modal coefficient representing the flow state. The results show that ACP successfully suppresses flow separation even at lower actuation voltages where predetermined burst control fails, demonstrating the effectiveness of adaptive feedback control based on real-time velocity-field observation.

1. はじめに

これまでに様々な流体制御方法が提案されてきている．プラズマアクチュエータは，取り付けの容易性や即応性などに優れており，将来的な流体制御デバイスとして有望視されている．特に，この即応性を利用したフィードバック制御に注目が集まりつつある．

リアルタイムの流体制御を実現するためには，リアルタイムの流体観測が必要になる．特に速度場を用いたフィードバック制御は，流れ場の剥離や付着，渦の移流と行った重要な特徴を捉えた流体制御につながると期待される．著者らの研究グループでは，リアルタイム流体観測を実現する方法として，粒子画像流速測定法（PIV) に基づき，スパースな点のみを観測して，POD モードを推定するスパースプロセッシング PIV を提案，実証してきている[1)–3)]．

これまでに，スパースプロセッシング PIV とプラズマアクチュエータを利用したリアルタイムフィードバック制御を行うことで，円柱周り流れのカルマン渦による流れ場の非対称性を抑える研究に成功している[4)]．本発表ではスパースプロセッシング PIV とプラズマアクチュエータを利用したリアルタイムを翼周り剥離制御に適用した結果を報告する．なおこれらの結果は，論文[5)] に報告したものに基づく．

2. 制御システム

解析のフローチャートを図に示す．詳細は論文を参照されたい．流体制御には，バースト駆動のプレデターミンド制御，1 ステップ先を予測する線形モデル SSP，複数ステップ先を予測する線形モデル MSP，流れ場の状況に応じてバースト駆動を切り替える ACP を試行した．ACP は本研究で提案する方法であり，第一モードのモード係数に応じて，バースト駆動の周波数を変更する制御方法となる．

3. 実験

験は名古屋大学基礎空力研究用小型風洞 (ν-BART) で 実施し，2 つの PA（利用したのは前縁の一つのみ）を設置した NACA0015 模型 (翼弦長 100 mm，幅 300 mm) を用いた．ハイスピードカメラに Photron 社の IDP-Express R2000 を利用した．主流速度は 10 m/s，PIV 計測時の撮影速度は 4,000 fps とした．このとき，レイノルズ数は 63,000 である．駆動にはピー・エス・アイ社の高電圧出力アンプ PSI-PA1050N を用いた．PA の波形は 10,000 Hz，8 kVpp の正弦波に設定し，ON の間のみ放電した．2 つの PA の動作はそれぞれ独立である．リアルタイム制御では，PA をコンピュータに組み込んだ National Instrument 社の I/O デバイス PCIe-6323 のデジタル出力を利用した．

4. 制御結果

図に結果を示す．8 kV の高電圧ではバースト駆動のプレデターミンド制御でも翼型の剥離を抑えることができる一方，6 kV では，失敗する．一方，線形モデルに基づく，SSP や MSP では制御できていない．一方で提案する ACP 法は少ない電圧の場合にも流体場を制御することに成功している．

この結果は，剥離した流れ場に変動を与える周波数と付着した流れを保つためのバースト周波数が異なることを示唆しており，今後のより効率的な剥離流れの制御方法に示唆を与えるものと考える．

5. 結論

本研究では，スパースプロセッシング PIV とプラズマアクチュエータを用いたリアルタイム流体制御を実現し，その性能を評価した．流れ場の変化に応じてバースト周波数を変化させる ACP 法を用いることで効率的に流れ場を制御できること示した．本結果は今後のより効率的な剥離流れの制御方法に示唆を与えるものと考える．

参考文献

1) N Kanda, K Nakai, Y Saito, T Nonomura, K Asai : Feasibility study on real- time observation of flow velocity field using sparse processing particle image velocimetry , Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 64, 2021.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

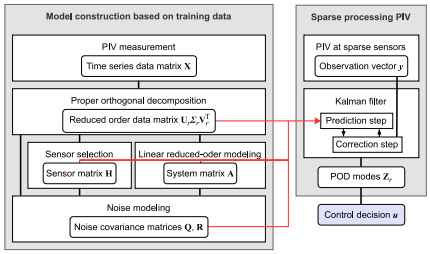


Fig. 1 Diagram of Real-time Feedback Control Using Sparse Processing PIV..[5)]

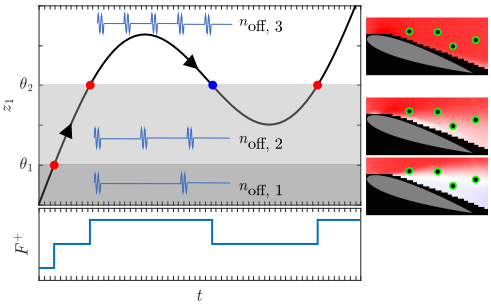


Fig. 2 Diagram of ACP flow control.[5)]

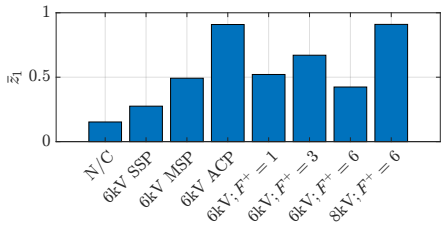


Fig. 3 Results of flow control. The mode coefficient z_1 of 1 and 0 shows attached and separated flows, respectively. The legend with F^+ is predetermined burst control with that nondimensional frequency F^+.[5)]

2) N Kanda, C Abe, S Goto, K Yamada, K Nakai, Y Saito, K Asai, T Nonomura: Proof-of-concept study of sparse processing particle image velocimetry for real1-time flow observation , Experiments in Fluids, 63, 2022.
3) C Abe, N Kanda, K Nakai, T Nonomura: Robust and multiresolution sparse processing particle image velocimetry for improvement in spatial resolution, Journal of Visualization 28 2025.
4) T Nonomura, C Abe, R Naramura, Y Sasaki: Real-time feedback control of flow velocity field using sparse processing particle image velocimetry and plasma actuators , Experiments in Fluids, 66, 2025.
5) R Viguera, R Naramura, Y Sasaki, T Nonomura: Adaptive Control Pattern for Real-Time-Visual-Feedback Flow Separation Control over Airfoil with Sparse Processing Particle Image Velocimetry and Plasma Actuator , Experiments in Fluids, 67, 2025.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

進行波壁面による乱流抵抗低減制御
— 実験研究の進展と力学機構の解明 —
Turbulent Drag Reduction by Traveling-Wave Walls: Experimental Progress and Physical Mechanisms

岩本　薫（農工大・工）
Kaoru IWAMOTO, Tokyo University of Agriculture and Technology
E-mail: iwamotok@cc.tuat.ac.jp

Reduction of skin-friction drag in wall turbulence is an important issue directly related to energy saving in transportation systems, and active control using traveling waves imposed on a wall has attracted considerable attention as a promising approach. In this lecture, recent progress in experimental studies on turbulent drag reduction in a turbulent boundary layer over a traveling-wavy wall formed on a flexible rubber sheet is presented. Wind-tunnel experiments confirmed the reduction of skin-friction drag by the traveling-wavy wall. In addition, the streamwise evolution of the turbulent boundary layer developing over the traveling-wavy wall was measured, and it is experimentally demonstrated for the first time that the drag-reduced state can be maintained over a wide streamwise extent. Furthermore, changes in vortex structures are captured by stereoscopic PIV measurements. Combined with insights from DNS and pathline analysis of traveling-wave blowing and suction control, the mechanical mechanism of drag reduction through modulation of near-wall quasi-coherent turbulent structures is discussed.

１．はじめに

壁乱流の摩擦抵抗低減は輸送機器の省エネルギー化に直結する重要課題であり，壁面に進行波を与える能動制御は有望な手法として注目されている．本講演では，柔軟ゴムシート上に形成した進行波状壁面を用いた乱流境界層抵抗低減の実験研究の進展を紹介する．風洞実験（図 1, 2）により進行波状壁面による摩擦抵抗低減を確認するとともに，進行波状壁面上で発達する乱流境界層の流下方向変化を計測し，抵抗低減状態が流下方向に広く維持されることを実験により初めて明らかにした [1,2]．さらにステレオ PIV 計測により渦構造の変化を捉え [3]，進行波状吹出・吸込み制御の DNS および流跡線解析の知見と併せて [4,5]，壁近傍の乱流準秩序構造の変調を通じた抵抗低減の力学機構について議論する．

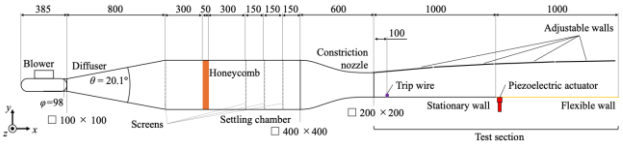


Fig. 1 Schematic of turbulent boundary layer wind tunnel (dimensions in mm)[1].

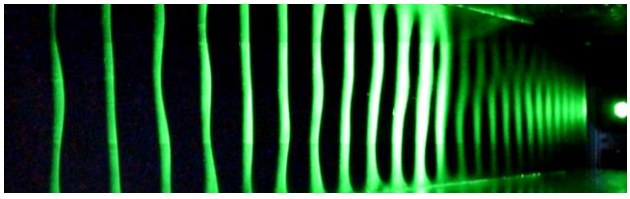


Fig. 2 Visualization of traveling wave[1].

参考文献

1) Y. Yoshida, T. Nimura, A. Mitsuishi, A. Murata and K. Iwamoto: Drag reduction of turbulent boundary layer flow with traveling wavy wall on flexible rubber sheet, Phys. Fluids 37, 075208, 2025.
2) Y. Yoshida, T. Nimura, A. Mitsuishi, A. Murata and K. Iwamoto: Streamwise evolution of drag-reduced turbulent boundary layer over a traveling wavy wall, J. Fluid Mech., in press, 2026.
3) 伊藤 興希，仁村 友洋，村田 章，岩本 薫: 進行波状壁面変形によって制御された乱流境界層流れにおける渦のステレオ PIV 計測，日本機械学会 第 102 期流体工学部門講演会，2024.
4) S. Koganezawa, A. Mitsuishi, T. Shimura, K. Iwamoto, H. Mamori and A. Murata: Pathline Analysis of Traveling Wavy Blowing and Suction Control in Turbulent Pipe Flow for Drag Reduction, Int. J. Heat Fluid Flow, 77, 0142-727X, 2019.
5) H. Mamori, K. Iwamoto and A. Murata: Effect of the Parameters of Traveling Waves Created by Blowing and Suction on the Relaminarization Phenomena in Fully Developed Turbulent Channel Flow, Phys. Fluids 26, 015101, 2014.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

2026年5月16日(土) 9:10 ~ 10:25 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (1)

座長：河原源太（大阪大学）

9:10 ~ 9:25

[15001] Navier-Stokes乱流における同期：データ同化とLyapunov解析によるダイナミクスの理解

*犬伏 正信[1]、Caulfield Colm-cille[2] (1. 東京理科大学、2. ケンブリッジ大学)

9:25 ~ 9:40

[15002] 粘弾性乱流境界層中の有限長角柱後流における乱流構造と高分子伸長の関係

*鷲見 竜雅[1]、仁村 友洋[1]、武藤 真和[1]、玉野 真司[1] (1. 名古屋工業大学大学院)

9:40 ~ 9:55

[15003] 高分子や界面活性剤の添加による乱流変調の物理機構

*後藤 晋[1]、増田 颯人[1]、鈴木 雅大[1]、Peruchi Zanca Augusto[1]、小井手 祐介[1]、本告 遊太郎[1] (1. 大阪大学)

9:55 ~ 10:25

討論

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Navier–Stokes 乱流における同期：データ同化とLyapunov解析によるダイナミクスの理解
Synchronisation in Navier–Stokes turbulence: insights from data assimilation and Lyapunov analysis

犬伏　正信（理科大・理）　Colm-cille P. Caulfield（ケンブリッジ大・DAMTP）
Masanobu INUBUSHI, Tokyo University of Science
Colm-cille P. CAULFIELD, University of Cambridge
E-mail: inubushi@rs.tus.ac.jp

In Navier–Stokes turbulence, large-scale turbulent flows inevitably determine small-scale flows. Previous studies using data assimilation with the Navier-Stokes equations indicate that employing observational data resolved down to a specific length scale enables the successful reconstruction of small-scale flows. We characterise both the critical length scale and the associated exponential convergence rate through conditional Lyapunov exponents, ergodic invariants of the Navier–Stokes system.

Navier–Stokes 乱流の性質として，非線形性および大自由度性があげられる．この乱流ダイナミクスの性質を理論的に特徴付ける方法として，近年データ同化手法が注目を集めている[1]．数学的には古くからDetermining Modes等の概念として研究されてきた性質（文献[2]のChapter III - Finite Dimensionality of Flows参照）であるが，数値的研究や以下で述べるようなデータ駆動型手法との関連で研究が盛んになっている．

データ同化（その中でも最も単純な直接挿入法Direct Insertion Method）では流体の速度場uに対して，観測可能な変数pと観測困難な変数qに分解すること，すなわち$u = p + q$を考える．ここでは，pを速度場の大スケール成分，qを速度場の小スケール成分と考える[3,4]．

データ同化の目標は，部分観測データ$(p(t))$を用いて，観測困難な変数qの推定値$\hat{q}$を得ることである．その一結果をFig. 1に示す[4]．上段は直接数値計算（DNS）の結果（渦度場）であり，$u(t) = p(t) + q(t)\ (0 \le t \le 3)$を表す．ここでデータ同化の開始時刻を$t = 0$とした．中段は部分観測データであり$p(t)$を表す．これは単にDNSの結果をローパスフィルタした渦度場である．下段はデータ同化の結果であり，$\hat{u}(t) = p(t) + \hat{q}(t)$を表す．詳細は講演にて紹介するが，データ同化結果の渦度場は，急速に（実は指数関数的に）DNSの渦度場に漸近していることがわかる．この挙動は，初期推定$\hat{q}(0)$に依らずに確認されるため，小スケール渦度場が大スケール渦度場に同期するとみなすことができる．実際，力学系理論における同期解析手法である条件付きLyapunov指数を用いることで，これらの現象を（データ同化を離れて）Navier–Stokes方程式の性質として特徴付けることが可能である[3,4]．

本講演ではこの力学系的解釈に基づき，乱流のデータ同化研究について紹介する．データ同化は（気象予測など）応用上重要なデータ駆動型手法であるだけでなく，乱流のダイナミクスを隷属性・因果関係の観点から理解するための新たなアプローチとして有用である．また，2 次元乱流と3 次元乱流の違いが，データ同化に関する性質の著しい違いとして現れることを述べる[4]．最後に，これらのデータ同化に関する知見が，乱流の機械学習モデルを構築する上でも重要になること[5]を紹介する．

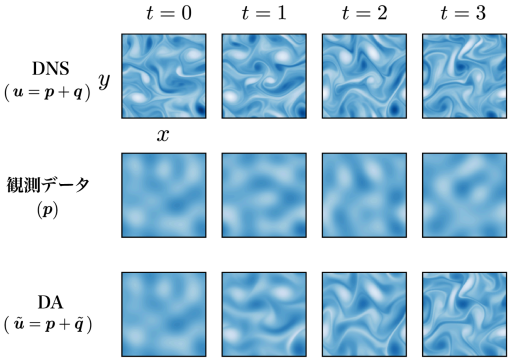


Fig. 1 Data assimilation experiment in Navier–Stokes turbulence. From top to bottom: a snapshot of the two-dimensional Kolmogorov flow with an Ekman friction term (DNS, corresponding to $u(t) = p(t) + q(t)$; the observational data (the vorticity field obtained by low-pass filtering the DNS vorticity field, corresponding to $p(t)$); and the data assimilation results (corresponding to $\hat{u}(t) = p(t) + \hat{q}(t)$).

参考文献

1) T. A. Zaki: Turbulence from an observer perspective, Annual Review of Fluid Mechanics 57, 2025.
2) C. Foias, O. Manley, R Rosa, and R Temam: Navier-Stokes equations and turbulence. Vol. 83. Cambridge University Press, 2001.
3) M. Inubushi, Y. Saiki, M. U. Kobayashi, and S. Goto: Characterizing small-scale dynamics of Navier–Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach, Physical Review Letters, 131.25, 2023.
4) M. Inubushi and C. P. Caulfield: Synchronisation in two-dimensional damped-driven Navier-Stokes turbulence: insights from data assimilation and Lyapunov analysis, Journal of Fluid Mechanics, 1027, 2026.
5) S. Matsumoto, M. Inubushi, and S. Goto: Stable reproducibility of turbulence dynamics by machine learning, Physical Review Fluids, 9.10, 2024.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

粘弾性乱流境界層中の有限長角柱後流における乱流構造と高分子伸長の関係

Turbulence Structures and Polymer Extension in the Wake of a Finite Wall-Mounted Square Cylinder in Turbulent Boundary Layers of Viscoelastic Fluids

鷲見　竜雅（名工大院）　仁村　友洋（名工大院）　武藤　真和（名工大院）　玉野　真司（名工大院）
Ryuga SUMI, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology
Tomohiro NIMURA, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology
Masakazu MUTO, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology
Shinji TAMANO, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology
E-mail: r.sumi.505@stn.nitech.ac.jp

The drag reduction (DR) effect of viscoelastic fluids can significantly reduce the skin friction in the turbulent boundary layer. In practical applications, however, wall-mounted obstacles generate wake disturbances, which may influence DR performance. In this study, the direct numerical simulations (DNS) of the flow around a finite wall-mounted square cylinder in the turbulent boundary layer of viscoelastic fluids are performed to investigate the effect of polymer extension on turbulence structures in the wake.

1．緒言

粘弾性流体の抵抗低減（drag reduction: DR）効果[1]は，壁面における流動摩擦抵抗を顕著に低減させることが報告されており[2]，その工学的応用への期待が高まっている．しかし，流体輸送用の配管系や船舶の底面などの実用環境では，測定装置や制御装置などの障害物が壁面に設置されており，これらの後流で生じる乱れが DR 効果に及ぼす影響が懸念される．したがって，粘弾性流体中における壁面設置障害物後流の流動特性を明らかにすることが重要である．本研究では，DR 効果が発現する平板上粘弾性乱流境界層に有限長さの角柱を設置した流れの直接数値計算（DNS）を実施し，高分子流体中の角柱後流における乱流構造と高分子伸長の関係を調査した．

2．計算手法

DNS の支配方程式である無次元化された非圧縮性粘弾性流体の運動方程式を式(1)に示す．ただし，粘弾性応力は FENE-P モデル[3]に基づく構成方程式により与えた．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\beta}{Re_{\theta_0}}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\frac{1-\beta}{Re_{\theta_0}}\frac{1}{Wi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{L^2 C_{ij}}{L^2-C_{kk}}-\delta_{ij}\right) \quad (1)$$

式(1)は，主流速度 U_e，代表運動量厚さ θ_0，溶媒のせん断粘度 η_s，密度 ρ を用いて無次元化されている．式(1)中 Re_{θ_0}，Wi，β は，それぞれレイノルズ数 $Re_{\theta_0}\equiv\rho U_e\theta_0/\eta_s$，ワイセンベルク数 $Wi\equiv\lambda U_e/\theta_0$，せん断粘度比 $\beta\equiv\eta_s/\eta_0$ である．ここで，λ は高分子の緩和時間，η_0 は溶液のゼロせん断粘度である．また，式(1)中の L は高分子の最大伸長，C_{ij} はコンフォメーションテンソルである．本研究では，$Re_{\theta_0}=670$，$Wi=30$，$\beta=0.9$，$L^2=10000$ と設定した．計算手法の詳細は文献 2)を，計算モデルの詳細は文献 4)を参照されたい．

3．結果および考察

Fig. 1 に，Q 値（速度勾配テンソルの第二不変量）の等値面（青色），およびコンフォメーションテンソルのトレース C_{kk} の等値面（橙色）を示す． Fig. 1(a)は俯瞰視点，(b)は真上からの視点である．ここで，C_{kk} は高分子伸長を表す物理量である．Fig. 1(a)における Q 値の等値面に着目すると，角柱後流においてC字状に歪曲した特徴的な渦の形成が認められ，間欠的に下流側へ放出されていることが確認できる．一方で C_{kk} の等値面に着目すると，下流側に広がる形状が間欠的に繰り返されている．また，Fig. 1(b)より，Q 値と C_{kk} の等値面には対応関係が認められる．以上の結果より角柱下流の渦と高分子伸長の間の相関関係が示唆される．

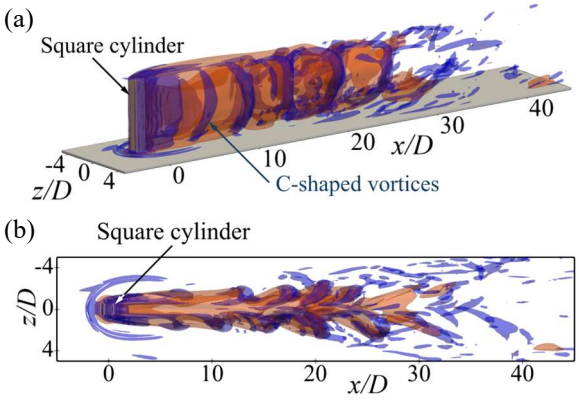


Fig. 1 Isosurface of instantaneous Q-criterion QD^2/U_e = 0.03 (blue) and trace of conformation tensor C_{kk}/L^2 = 0.4 (orange). (a) oblique view and (b) top view.

4．結言

本研究では，粘弾性乱流境界層に有限長角柱を設置した流れ場の直接数値計算を実施し，角柱後流における乱流構造と高分子伸長の関連を調査した．その結果，角柱後流における渦形成と高分子伸長との間に相関関係があることが明らかになった．

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業（JP23H01342）の助成を受けている．記して謝意を表す．

参考文献

1) B. A. Toms: Some Observations on the Flow of Linear Polymeric Solutions through Straight Tubes at Large Reynolds Numbers, Proceedings of Int. Congr. Rheol., 2, pp. 135–141, 1948.
2) S. Tamano, M. D. Graham, and Y. Morinishi: Streamwise Variation of Turbulent Dynamics in Boundary Layer Flow of Drag-Reducing Fluid, J. Fluid Mech., 686, pp. 352–377, 2011.
3) R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager: Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics, 2nd ed, Wiley Interscience, 1987.
4) R. Sumi, K. Maekawa, M. Muto, S. Tamano: Analysis of Turbulence Statistics Based on DNS in Wake of Wall Mounted Finite-Length Square Cylinder in Viscoelastic Turbulent Boundary Layer, Proceedings of J-K TFEC11, JK-TFEC11-1210, 2025.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

高分子や界面活性剤の添加による乱流変調の物理機構

Physical Mechanisms of Turbulence Modulation by Polymer and Surfactant Additives

後藤 晋，増田 颯人，鈴木 雅大，Augusto Henrique Peruchi Zanca，小井手 祐介，本告 遊太郎（大阪大学・基礎工）
Susumu Goto, Hayato Masuda, Masahiro Suzuki, Augusto Henrique Peruchi Zanca, Yusuke Koide, Yutaro Motoori,
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka
E-mail: s.goto.es@osaka-u.ac.jp

The phenomenon where turbulence is reduced by adding dilute polymers or surfactants is well known. To understand the physical mechanism behind this turbulence modulation, we report the results of research conducted through experiments and numerical simulations of turbulence modulation by these additives.

１．はじめに

微量の高分子を乱流状態にある流体に添加すると，その乱流強度が劇的に低減する現象はトムズ効果として古くから知られる．同様の効果は，界面活性剤の添加でも見られる．このような添加剤による乱流制御方法は大がかりな制御装置などを必要としないので，既に実用化もされている．

一方で，この興味深い乱流変調現象の物理機構に関しては今もなお議論が続いている．古典理論 [1,2] はあるものの，その実験的な検証は，支配するパラメタの多さから，必ずしも容易ではない．一方で，非ニュートン流体の乱流の数値シミュレーションが可能となったことで，この現象を理解するための手がかりが得られるようになった．

そこで我々は，実験と数値シミュレーションを協働して，高分子や界面活性剤の添加による乱流低減の物理機構の解明に挑戦している．

２．手法

実験は，図１に示す乱流駆動装置を用いて行う．この装置では，直方体のタンクに作動流体を入れ，４つの互い違いの向きに回転する回転子により乱流を駆動する．回転子の形状としては，円柱状および平板状のものを用いる．前者は回転子表面の粘性応力により流れを駆動する（粘性撹拌），後者は回転子表面の圧力により流れを駆動する（慣性撹拌）に対応し，質的に異なる乱流を駆動できる．

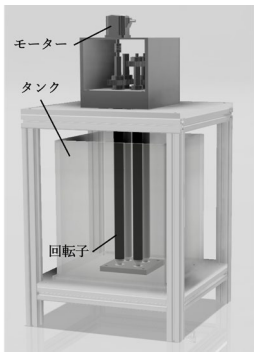


図１乱流駆動装置．

この装置内に駆動された乱流に高分子や界面活性剤を添加して，流れの統計性質がどのように変化するかを調べる．流速場の情報は，粒子画像流速測定（PIV）あるいは粒子追跡流速測定（PTV）と，レーザードップラー流速測定を併用して行う．

一方，数値シミュレーションでは，周期境界条件下の乱流を，ナビエ・ストークス方程式を有限差分法により解くことで求める．添加物の効果は，構成則（FENE-P モデル）を用いた手法，あるいは流体中を浮遊するダンベルと乱流の相互作用を評価する手法 [3] のいずれかで表現する．

３．結果

図１の実験装置を用いて行った実験結果を図２（a, b）に示す．図１(a) は水，(b) は界面活性剤（CTAC）を 75 ppm だけ添加した水溶液の PTV の結果を示す．これらの図からも，微量の添加物が劇的な効果をもち，回転子間に存在した渦が消滅することが確認できる．

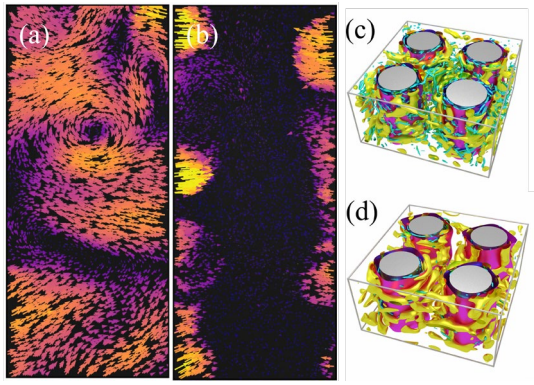


図２ (a, b) 図１の装置内に維持される水および界面活性剤水溶液の乱流（PTV による，粘性撹拌の結果）．(c, d) 同様の系に対する数値シミュレーションによる渦の可視化．

次に，同様の系における数値シミュレーション結果の例を図２(c, d) に示す．図２(d) には，高分子の添加による乱流が変調した状態における渦の可視化を示す（赤色が最大渦，黄色が中渦，青色が小渦）．実験と同様，本来は多様なスケールの渦が混在していた乱流（図２c）に対して，変調後の乱流では，より小さな渦から低減する様子が確認できる．

このような乱流低減は，乱流中のより小さい渦ほど短い時間スケールをもつことから定量的にも説明できる．物理機構の詳細は講演時に述べるとともに，出席者の皆さんと深く議論したい．

参考文献

1) J. Lumley 1969 Drag reduction by additives. Annu. Rev. Fluid Mech. 1, 367–384.
2) P. G. de Gennes 1986 Towards a scaling theory of drag reduction. Physica A 140, 9–25.
3) T. Watanabe & T. Gotoh 2013 Hybrid eulerian-lagrangian simulations for polymer-turbulence interactions. J. Fluid. Mech. 717, 535–575.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

2026年5月16日(土) 10:35 ~ 11:50 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (2)

座長：米田剛（一橋大学）

10:35 ~ 10:50

[15004] 円管乱流におけるマイクロバブルの時空間分布に関する実験的試み

*呉 顕峰[1]、濱名 泰久[1]、辻 義之[1] (1. 名古屋大学)

10:50 ~ 11:05

[15005] Couette乱流における共変Lyapunovベクトルの整列と動力学

*佐々木 英一[1]、河原 源太[2]、山田 道夫[3] (1. 秋田大学、2. 大阪大学、3. 京都大学)

11:05 ~ 11:20

[15006] 薄い球殻と単位球面上のナヴィエ・ストークス方程式の弱解に対する差分評価

*三浦 達彦[1] (1. 東京都立大学)

11:20 ~ 11:50

討論

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

円管乱流におけるマイクロバブルの時空間分布に関する実験的試み
An Experimental Investigation of the Spatial-Temporal Distribution of Microbubbles in Turbulent Pipe Flow

呉　顕峰（名大・工）　　濱名　泰久（名大・工）　　辻　義之（名大・工）
Xianfeng WU, Nagoya University
Yasuhisa HAMANA, Nagoya University
Yoshiyuki Tsuji, Nagoya University
E-mail: wu.xianfeng.i5@s.mail.nagoya-u.ac.jp

Microbubble-induced drag reduction has been widely studied through experiments and numerical simulations. Their physical properties, such as size distribution and morphology, play a key role in modulating turbulent flows. In this study, microbubbles with an average diameter of approximately 60 μm were introduced into a fully developed turbulent pipe flow. A two-dimensional backlight shadow imaging technique was used to measure the spatial-temporal distribution of microbubbles in the near-wall region. The present study aims to provide a new perspective on microbubble drag reduction mechanisms through a quantitative analysis of the spatial-temporal distribution of microbubbles in the near-wall region.

１．はじめに

国際貿易の 80%は船舶によるものであり，この過程で発生する二酸化炭素の排出量は世界全体の約 6%を占めている．現在，国際的な省エネと排出削減が非常に重視されており，船舶海運業においても環境への配慮がますます求められている．船舶輸送のエネルギーロスの 70%が海面による摩擦抵抗と言われており，抵抗低減により大規模な省エネ化が期待されている．船舶の流体抵抗に関する研究によれば，航行中に発生する抵抗は主に圧差抵抗と表面摩擦抵抗から成り立っている．油船，散貨船，およびコンテナ船において，表面摩擦抵抗が総抵抗の約 60%～80%を占めている [1]．そのため，表面摩擦抵抗低減は海運業において省エネと抵抗低減の観点から非常に重要である．これまで様々な摩擦抵抗低減技術が提案されているが，中でもマイクロバブル（microbubbles, MB）を用いた抵抗低減手法は，有望なアクティブ制御技術の一つとして注目されている．

著者らはこれまで，円管乱流に MB を導入した場合の乱流特性の変化について検討してきた. 先行研究では, MB 導入により小スケール乱流構造の統計量（内部エネルギー，体積，構造数）が低下することを報告した [2]．また，レイノルズ応力に関連する乱流事象について 4 象限解析を適用した結果，強い Q2 および Q4 事象が MB によって選択的に抑制されることを示した [3]．しかしながら，MB がこれらの乱流統計量や乱流事象に影響を及ぼすメカニズム，すなわち流れ場中において MB がどのように作用しているのかについては, 依然として十分に明らかではない. 一方で，気泡の物理的特性（サイズ分布や形状など）が抵抗低減性能に重要な影響を及ぼすことは広く知られている．したがって，MB の作用を理解するためには，壁面近傍領域における MB の時空間分布特性を実験的に把握することが重要である．

そこで本研究では，円管乱流場に MB を導入し，二次元バックライト法を用いて壁面近傍領域における MB の時空間分布を定量的に解析することを目的とする. これにより，MB による抵抗低減メカニズムの理解に対して，新たな視点が得られることが期待される．

２．実験および計測法

本実験では，循環式流路を用いて測定を行った．実験システムは，循環管路，測定セクション，および二次元バックライト可視化システムの三つの要素から構成される．循環管路は，タンク，流量計，ポンプ，および配管系により構成されている．MB は，上流側のタンク内において流体中へ供給した．測定セクションは透明アクリル製円管からなり，入口から下流約 3000 mm の位置に設置した．これにより，測定部において十分に発達した乱流場が形成されている. Fig.1 に測定セクションおよび二次元バックライト可視化システムの概略図を示す．座標系の原点は円管中心に設定し，x，y，z 軸はそれぞれ流れ方向，水平方向，および鉛直方向を表す．

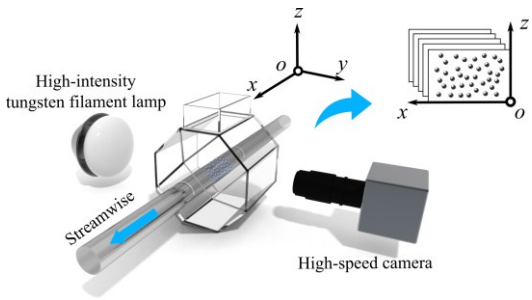


Fig.1 Schematic view of the visualization system.

バックライト光源には 450 W の高輝度白熱ランプを用い，x-z 平面方向から照射することで高コントラストな気泡シャドウ像を取得した．撮影には高速度カメラ（Photron AX-50）を用い，解像度 1024×1024 pixel^2，12 bit 階調にて画像を取得した．円管曲率に起因する光学的屈折および像歪みの影響を低減するため，管外部に光学補正プリズムを設置した．撮影には 180 mm Nikon マクロレンズに 3 倍テレコンバータを組み合わせて使用した．実効空間分解能は 6.2μm/pixel であり，実験に先立ち x-z 平面内に設置した精密キャリブレーションプレートを用いて校正を行った．統計的に独立したサンプルを取得するため，サンプリング周波数は 50 Hz に設定した．

実験は，管径 D および断面平均流速 U に基づくレイノルズ数 Re ≈ 16,400，26,000，36,500，46,500，57,300 の条件下で実施した．流路内の異なる領域における気泡特性を評価するため，カメラの設置高さを調整し，管中心部および壁面近傍領域の撮影をそれぞれ行った．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

３．結果と考察

Figure 2 に取得された代表的な原画像を示す．MB は明るい背景に対して暗い影として観察される．気泡径を抽出するため，自動画像処理アルゴリズムを構築した．処理手順を以下に示す．まず，グレースケール画像に対して閾値処理を適用し，気泡候補領域を抽出した（Fig.3(a)）．次に，被写界深度の制約により焦点面外に存在する気泡は輪郭が不明瞭となり，径計測に誤差を生じる可能性があるため，勾配ベースのエッジ検出法を適用し，明瞭な輪郭を有する焦点内気泡のみを抽出した（Fig.3(b)）．この処理は計測精度の確保において重要である．

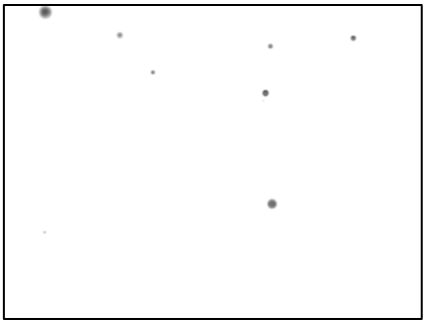


Fig.2 Example of a recorded image, where the black dots represent microbubbles.

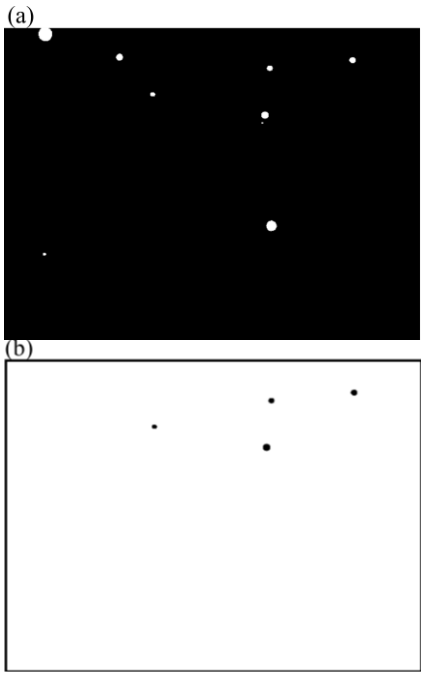


Fig.3 Image processing examples. (a) Binarized image where white spots indicate bubbles, including out-of-focus ones. (b) Validated bubbles within the focal plane identified after edge detection.

抽出された有効気泡に対しては，投影面積 A_b に基づき，式(1)を用いて等価直径 d_b を算出した．なお，面積 A_b は画素数および校正係数により決定した．

$$d_b = \sqrt{\frac{4A_b}{\pi}} \tag{1}$$

Figure 4 に，Re = 16,400 における全測定位置（壁面近傍および管中心部）で取得した気泡径の確率密度関数（PDF）を示す．気泡径は単峰性の分布を示し，ピーク値は約 70 μm，平均径は約 60 μm であった．

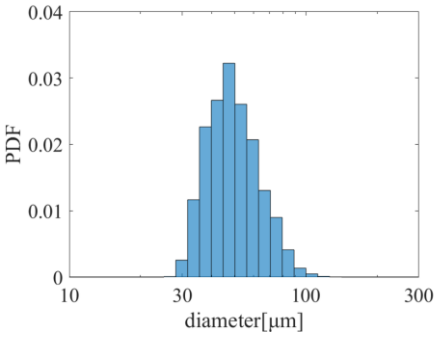


Fig.4 Probability density function of microbubble diameters.

さらに，壁法線方向における気泡径の分布を評価した結果を Fig.5 に示す．気泡径分布は壁面からの距離の増加に伴い減少する傾向を示し，壁面近傍における平均気泡径は管中心部に比べて大きいことが確認された．このような近壁領域における気泡径の変化は，抵抗低減現象の理解に対して重要な示唆を与える可能性がある．その要因の解明には，さらなる解析および比較検討が必要である．

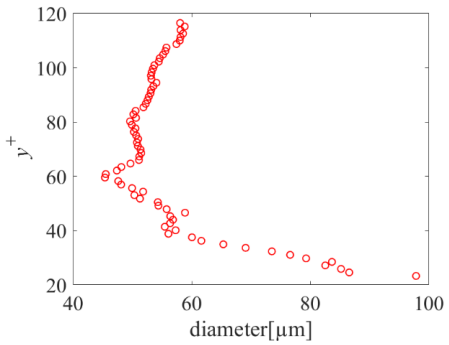


Fig.5 Wall-normal distribution of microbubble diameter.

４．おわりに

本研究では，二次元バックライト法を用いて円管内乱流場における MB の時空間分布特性について実験的に調査した．実験では，壁面近傍および管中心部における気泡径分布を定量的に評価した．今後は，MB の分布特性と抵抗低減現象との関連性について，さらなる検討を行う予定である．

参考文献

1) 川島久宜,児玉良明: マイクロバブルによる摩擦抵抗低減に関する実験的研究，日本流体力学会誌 「ながれ」, 25, pp.209-217, 2006.
2) X. Wu, Y. Hamana, & Y. Tsuji: Microbubble drag reduction and effect on small-scale turbulent structures in pipe flow, Physics of Fluids, 37(10), 2025.
3) X. Wu, Y. Hamana, & Y. Tsuji: Microbubble effect on Reynolds shear stress in drag reduction process in turbulent pipe flow, Physics of Fluids, 38(2) , 2026.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Couette 乱流における共変 Lyapunov ベクトルの整列と動力学
Alignment events of covariant Lyapunov vectors in moderately developed Couette turbulence

佐々木　英一（秋大・理工），河原　源太（阪大・基礎工），山田　道夫(京大・数理研)
Eiichi SASAKI, Akita University
Genta Kawahara, University of Osaka
Michio Yamada, Kyoto University
E-mail: esasaki@gipc.akita-u.ac.jp

Orbital instability in moderately developed Couette turbulence is investigated using covariant Lyapunov vector (CLV) analysis. The leading Lyapunov exponents are closely spaced (within 2%), while the corresponding CLVs have similar spectra and are predominantly localized in the buffer layer. Intermittent alignment events are observed, during which the associated local Lyapunov exponents become particularly close. Nevertheless, volume measures based on pairs of CLVs remain appreciable on average, indicating that the vectors are not persistently degenerate. We discuss the dynamical implications of the coexistence of intermittent alignment and non-degeneracy.

Lyapunov 解析は解軌道に沿った安定性を調べる方法で，カオスの重要な性質である初期値鋭敏性を定量的に評価することができる．本研究は，壁面摩擦 Reynolds 数 400 程度の Couette 乱流について共変 Lyapunov 解析 [1]を行った．第 1,2Lyapunov 指数はそれぞれ$\gamma^1 = 0.652U/h, \gamma^2 = 0.646U/h$と近い値を持つ．ここに$U, h$は両壁面の速度差の半分とチャネル半幅である．対応する Lyapunov ベクトルのエネルギースペクトルに顕著な差はみられず，不安定構造は主に壁面近傍のバッファー層に存在する．しかし，バッファー層乱流の典型的な秩序スケール [2]にくらべ，Lyapunov ベクトルの壁平行方向の広がりは半分以下である(Fig. 1)．この結果は，バッファー層の不安定性が Lyapunov ベクトルの重ね合わせに起因することを示唆する．局所 Lyapunov ベクトル同士のなす角を調べたところ，小角となるイベントが間欠的に現れる．このとき，対応する局所 Lyapunov 指数は近い値となる．しかし，Laypunov ベクトルが張る平行面体の体積の平均は十分大きく，Lyapunov ベクトルは常に縮退していない．講演では局所 Lyapunov 指数が近づくイベントに注目し，その際の Lyapunov ベクトルの幾何(角度・体積)と乱流場の状態との対応を議論する．

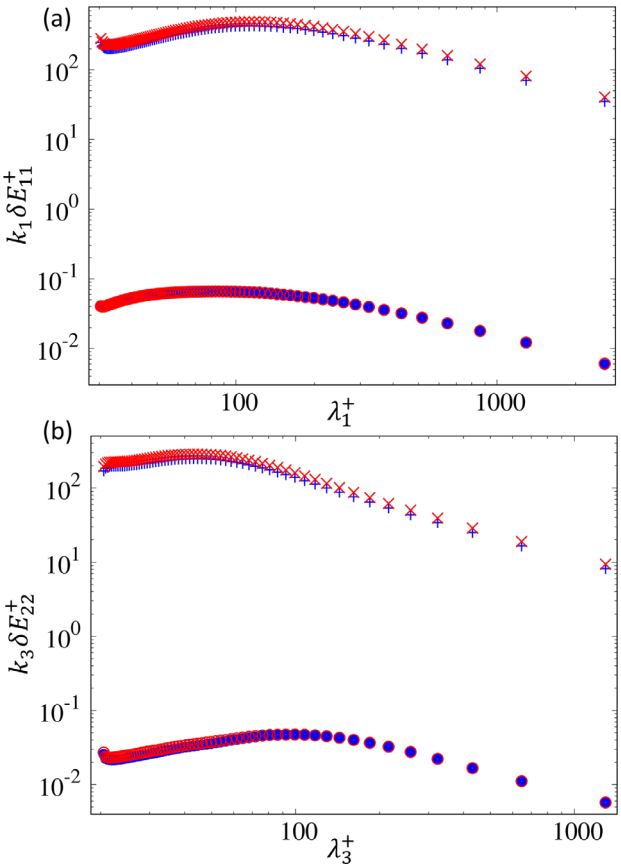


Fig. 1 Premultiplied power spectra of Lyapunov vectors at $\mathrm{R}_\tau = 411$: (a) $k_1\delta E_{11}(k_1, y)$, (b) $k_3\delta E_{22}(k_3, y)$. The red and blue colors represent the 1st and 2nd Lyapunov vectors, respectively. The closes and plusses indicate $y^+ = 29.6$, while points and circles mean $y = h$.

参考文献
1) E. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chaté, R. Livi and A. Politi: Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors, Phys. Rev. Lett. 99, 130601, 2007.
2) J. Jiménez and P. Moin: The minimal flow unit in near-wall turbulence, J. Fluid Mech. 225, 213-240, 1991.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

薄い球殻と単位球面上のナヴィエ・ストークス方程式の弱解に対する差分評価

Difference estimate for weak solutions to the Navier–Stokes equations in a thin spherical shell and on the unit sphere

三浦　達彦（弘前大・理工）
Tatsu-Hiko MIURA, Hirosaki University
E-mail: thmiura623@hirosaki-u.ac.jp

We consider the Navier–Stokes equations in a 3D thin spherical shell and on the 2D unit sphere, and estimate the difference of weak solutions on the two different domains. Assuming that the weak solution on the thin spherical shell is a Leray–Hopf weak solution satisfying the energy inequality, we derive difference estimates for the two weak solutions by the weak-strong uniqueness argument. The main idea is to extend the weak solution on the unit sphere properly to an approximate solution on the thin spherical shell, and to use the extension as a strong solution in the weak-strong uniqueness argument.

1. 導入

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < |x| < 1+\varepsilon\}$ を 3 次元の薄い球殻とする. 本講演では薄い球殻上で次のナヴィエ・ストークス (NS) 方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}^\varepsilon - \nu\Delta\mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{D}(\mathbf{u}^\varepsilon)\mathbf{n}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_0^\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $\nu > 0$ は ε に依存しない粘性係数, $\mathbf{n}_\varepsilon$ は境界 $\partial\Omega_\varepsilon$ の外向き単位法線ベクトル, $\mathbf{P}_\varepsilon$ は $\partial\Omega_\varepsilon$ の接平面への直交射影, $\mathbf{D}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ は歪み速度テンソルである. また, 境界では「流体が領域の内外に出入りせず, 摩擦力を受けずに境界上を滑る」というナヴィエ境界条件を課している.

$\varepsilon \to 0$ のとき, Ω_ε は 2 次元単位球面 S^2 に退化する. 一般に, 空間内のある方向への幅が非常に小さく, その幅をゼロに近づけると低次元の極限集合に退化する領域のことを, 薄膜領域または薄い領域 (thin domain) という. 細胞膜中の物質輸送や地球流体の運動など, 自然界には薄膜領域上の偏微分方程式によって数理モデル化される現象が数多く存在する. 薄膜領域が低次元集合に退化するとき, 薄膜領域上の方程式から極限集合上の方程式を導出し, 解の差分評価などを通じて 2 つの方程式を比較しようと思うことは自然である. このような厚さゼロ極限の問題を考察することは純粋数学として意味があるだけではなく, 独立変数の個数 (領域の次元) の削減や, 曲面などの低次元集合における現象の数理モデル化など, 応用の観点からも重要である.

講演者による先行研究[5] では, 一般の 2 次元閉曲面に厚みを付けた曲がった薄膜領域上で NS 方程式を考え, 厚さゼロ極限によって閉曲面上の NS 方程式を数学的に厳密に導出した. 薄い球殻 Ω_ε の場合, NS 方程式 (1) から厚さゼロ極限で導出される S^2 上の NS 方程式は次の形になる:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} - 2\nu\mathbf{P}\operatorname{div}_{S^2}[\mathbf{D}_{S^2}(\mathbf{v})] + \nabla_{S^2} q = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}_{S^2}\mathbf{v} = 0 \quad \text{on} \quad S^2 \times (0,\infty), \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{on} \quad S^2. \end{cases} \tag{2}$$

ただし, $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}_0$ は S^2 上の接ベクトル場, ∇_{S^2} と div_{S^2} は接勾配と表面発散, $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ は共変微分である. また, $\mathbf{P}$ は S^2 の接平面への直交射影, $\mathbf{D}_{S^2}(\mathbf{v})$ は S^2 の接平面における歪み速度テンソルであり, これらは 3×3 行列である. そのため, 方程式 (2) は S^2 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを必要とする外在的な表現であるが, 実は (2) は次の形に書き換えられる:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} - \nu\{\Delta_H \mathbf{v} + 2\mathrm{Ric}(\mathbf{v})\} + \nabla_{S^2} q = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}_{S^2}\mathbf{v} = 0 \quad \text{on} \quad S^2 \times (0,\infty). \end{cases} \tag{3}$$

ここで, Δ_H はホッジラプラシアン, Ric はリッチ曲率 (S^2 の場合は $\mathrm{Ric} \equiv 1$) であり, これらは S^2 の第一基本形式のみで記述される. したがって, 方程式 (3) は S^2 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを必要としない内在的な表現であり, 一般の多様体上の NS 方程式[1),9)] でもある. 幾何学的には (3) の方が洗練された表現かもしれないが, 本講演では $\mathbb{R}^3$ 内で記述された方程式 (1) と比較するため, 外在的な表現 (2) の方が都合がよい. また, 石鹸膜のように時間経過で移動や変形を伴う曲面上の流体運動を数理モデル化する際にも, (2) と同様の外在的な表現の NS 方程式が用いられている.[2),3)]

先行研究[5)] では, 一般の閉曲面の周りの曲がった薄膜領域上の NS 方程式について厚さゼロ極限での L^2 強解の収束を示し, その極限関数が満たす方程式として閉曲面上の NS 方程式を数学的に厳密に導出した. 薄い球殻 Ω_ε の場合, 先行研究の結果は次のように述べることができる.

命題 1　NS 方程式 (1) の初期値 $\mathbf{u}_0^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ に対して, 次の条件が成り立つと仮定する:

(a)任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\mathbf{u}_0^\varepsilon, \mathbf{r}_\mathbf{a})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0$.
　ただし $\mathbf{r}_\mathbf{a}(x) = \mathbf{a} \times x$ は軸 $\mathbf{a}$ 周りの無限小回転.
(b)ある定数 $c > 0$ が存在して $\varepsilon^{-1/2}\|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c$.
(c)$\varepsilon \to 0$ のとき, $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ の膜の厚さ方向への積分平均

$$\mathcal{M}_\varepsilon^0 \mathbf{u}_0^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^{1+\varepsilon} \mathbf{u}_0^\varepsilon(ry)\, dr, \quad y \in S^2 \tag{4}$$

　が S^2 上のある接ベクトル場 $\mathbf{v}_0$ に L^2 弱収束する.

このとき, 十分小さい各 $\varepsilon > 0$ に対して (1) の L^2 強解 $\mathbf{u}^\varepsilon$ が時間大域的に存在する. また, ある $S^2 \times [0,\infty)$ 上の接ベクトル場 $\mathbf{v}$ が存在し, 各 $T > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to0} \mathcal{M}_\varepsilon^0 \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{v} \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H^1(S^2)^3) \tag{5}$$

が成り立ち, さらに $\mathbf{v}$ は S^2 上の NS 方程式 (2) の唯一の時間大域的な L^2 弱解である. 次に, 各 $T > 0$ に対して $[0,T]$ における $\mathbf{u}^\varepsilon$ と $\mathbf{v}$ との誤差の 2 乗を測る量を

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\mathcal{D}_T^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\max_{t\in[0,T]}\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)-\bar{\mathbf{v}}(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\nu}{\varepsilon}\int_0^T \left\|\overline{\mathbf{P}}\nabla\mathbf{u}^\varepsilon(t)-\overline{\nabla_{S^2}\mathbf{v}}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt + \frac{\nu}{\varepsilon}\int_0^T \|\partial_r\mathbf{u}^\varepsilon(t)-\bar{\mathbf{v}}(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt \tag{6}$$

で定める. ただし, $\bar{\eta}(x)=\eta(x/|x|)$ は S^2 上の関数 η の半径方向への定数拡張であり, ∂_r は半径方向への微分である. このとき, 各 $T>0$ に対してある定数 $c_T>0$ が存在して

$$\mathcal{D}_T^\varepsilon \le c_T\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{u}_0^\varepsilon-\bar{\mathbf{v}}_0\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon\right) \tag{7}$$

が成り立つ (誤差としては $\sqrt{\mathcal{D}_T^\varepsilon}=O(\sqrt{\varepsilon})$ である).

一般の曲がった薄膜領域上の NS 方程式に対して命題 1 のような厳密な厚さゼロ極限の結果を示したのは, 論文[5] が初めてである. しかし, この論文は全 108 ページの第 1 部[7] と全 60 ページの第 2 部[6] の結果に基づいて書かれた第 3 部の論文であり, この論文自体も全 170 ページである. これだけの紙数を要したのは, 一般の閉曲面の近傍で定義されたベクトル場の解析手法を整備し, 薄膜領域上の NS 方程式の強解を構成して評価するためのあらゆる議論を ε への依存度の観点から再検討する必要があったことに由来する. ただ, 論文の長さゆえに, 命題 1 は有用な結果ではあるが容易にアクセスできない状態である. また, 講演者は論文[4] において, 動く閉曲面に厚みを付けた動く薄膜領域上の NS 方程式に対して形式的な厚さゼロ極限の計算を行ったが, これを命題 1 のような形で数学的に正当化するのは議論の難しさから絶望的である.

このような事情があり, 講演者は薄膜領域上の NS 方程式の解を強解ではなく弱解に変えて差分評価を導出できないか, と考えていた. 今回, 薄い球殻の場合にはその試みが上手くいき, 以下の結果を示すことができた.

2. 主定理

以下, 初期値 $\mathbf{u}_0^\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon)^3$ と $\mathbf{v}_0\in L^2(S^2)^3$ に対して, $\mathbf{u}^\varepsilon$ と $\mathbf{v}$ をそれぞれ NS 方程式 (1) と (2) の L^2 弱解とする (ただし $\mathbf{v}_0$ と $\mathbf{v}$ は S^2 上の接ベクトル場). なお, (2) は 2 次元の NS 方程式であるため, 平面領域の場合と同様にエネルギー法によって L^2 弱解の一意性とエネルギー等式

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(S^2)}+2\nu\int_0^t\|[\mathbf{D}_{S^2}(\mathbf{v})](s)\|^2_{L^2(S^2)}ds = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0\|^2_{L^2(S^2)},\quad t\ge 0 \tag{8}$$

の成立を示せることに注意する.

本講演の主定理は論文[8] で得られた次の結果である.

定理 2 Ω_ε 上の NS 方程式 (1) の弱解 $\mathbf{u}^\varepsilon$ はルレイ・ホップの弱解である, すなわちエネルギー不等式

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+2\nu\int_0^t\|[\mathbf{D}(\mathbf{u}^\varepsilon)](s)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}ds \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},\quad t\ge 0 \tag{9}$$

を満たす弱解であると仮定する. このとき, $\mathcal{D}_T^\varepsilon$ を (6) で定めると, 各 $T>0$ に対してある定数 $c_T>0$ が存在して

$$\mathcal{D}_T^\varepsilon \le c_T\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{u}_0^\varepsilon-\bar{\mathbf{v}}_0\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon^2\right) \tag{10}$$

が成り立つ (誤差としては $\sqrt{\mathcal{D}_T^\varepsilon}=O(\varepsilon)$ である).

命題 1 と比較すると, 定理 2 では $\mathbf{u}^\varepsilon$ がルレイ・ホップの弱解であることしか仮定していないにもかかわらず, 差分評価が $O(\sqrt{\varepsilon})$ から $O(\varepsilon)$ に改善している. ただし, 定理 2 に現れる定数 c_T は一般に T について指数増大であり, 時間局所的な差分評価にとどまっている (命題 1 も同様). 次の結果は, 初期値 $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ と $\mathbf{v}_0$ に追加の仮定を課すことで, 時間大域的な差分評価が得られることを示している.

定理 3 定理 2 の仮定の下, さらに任意の $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$(\mathbf{u}_0^\varepsilon,\mathbf{r}_\mathbf{a})_{L^2(\Omega_\varepsilon)}=0,\quad (\mathbf{v}_0,\mathbf{r}_\mathbf{a})_{L^2(S^2)}=0 \qquad (\mathbf{r}_\mathbf{a}(x)=\mathbf{a}\times x \text{ は軸 } \mathbf{a} \text{ 周りの無限小回転}) \tag{11}$$

が成り立つと仮定する. このとき, ある定数 $c_0>0$ が存在して, 全ての $T>0$ に対して

$$\mathcal{D}_T^\varepsilon+\frac{\nu}{\varepsilon}\int_0^T\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)-\bar{\mathbf{v}}(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt \le c_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{u}_0^\varepsilon-\bar{\mathbf{v}}_0\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon^2\right) \tag{12}$$

が成り立つ (c_0 は T に依存しないことに注意).

主定理の証明のポイントは次の 2 つである:

- S^2 上の NS 方程式 (2) の弱解 $\mathbf{v}$ を適切に拡張し, Ω_ε 上の NS 方程式 (1) の近似的な弱解 $\mathbf{v}_\mathrm{E}$ を構成する.
- Weak-strong uniqueness の議論により, Ω_ε 上の NS 方程式の弱解 $\mathbf{u}^\varepsilon$ と近似的な弱解 $\mathbf{v}_\mathrm{E}$ の差分を評価する.

実際の講演では, 命題 1 の証明と主定理の証明のアイデアの違いや, 定理 2 と定理 3 の証明で用いる不等式の違いなどを含め, 証明の要点をもう少し詳しく解説する.

参考文献

1) D. G. Ebin and J. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Ann. of Math. (2)*, 92:102–163, 1970.
2) T. Jankuhn, M. A. Olshanskii, and A. Reusken. Incompressible fluid problems on embedded surfaces: modeling and variational formulations. *Interfaces Free Bound.*, 20(3):353–377, 2018.
3) H. Koba, C. Liu, and Y. Giga. Energetic variational approaches for incompressible fluid systems on an evolving surface. *Quart. Appl. Math.*, 75(2):359–389, 2017.
4) T.-H. Miura. On singular limit equations for incompressible fluids in moving thin domains. *Quart. Appl. Math.*, 76(2):215–251, 2018.
5) T.-H. Miura. Navier-Stokes equations in a curved thin domain, Part III: thin-film limit. *Adv. Differential Equations*, 25(9-10):457–626, 2020.
6) T.-H. Miura. Navier-Stokes Equations in a Curved Thin Domain, Part II: Global Existence of a Strong Solution. *J. Math. Fluid Mech.*, 23(1):Paper No. 7, 60, 2021.
7) T.-H. Miura. Navier-Stokes Equations in a Curved Thin Domain, Part I: Uniform Estimates for the Stokes Operator. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 29(2):149–256, 2022.
8) T.-H. Miura. Difference estimate for weak solutions to the Navier–Stokes equations in a thin spherical shell and on the unit sphere. *arXiv:2507.06630*, 2025.
9) M. E. Taylor. *Partial differential equations III. Nonlinear equations*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2011.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

2026年5月16日(土) 15:00 ~ 16:15 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (3)

座長：松本剛（京都大学）

15:00 ~ 15:15

[15007] f面放射対流平衡における熱帯低気圧形成のデータ駆動型モデリング

*神野 拓哉[1]、原 誠人[2]、三ツ井 孝仁[3]、齊木 吉隆[2]、米田 剛[2] (1. 富山大学、2. 一橋大学、3. 順天堂大学)

15:15 ~ 15:30

[15008] 情報を保存する乱流モデル：チャネル乱流への適用

*橋本 丈瑠[1]、塚原 隆裕[1]、荒木 亮[1] (1. 東京理科大学)

15:30 ~ 15:45

[15009] 波数空間における定流束状態を用いた乱流のアンサンブルモデル

*吉田 恭[1] (1. 筑波大学)

15:45 ~ 16:15

討論

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

f 面放射対流平衡における熱帯低気圧形成のデータ駆動型モデリング
Data-driven modelling of tropical cyclogenesis in rotating radiative-convective equilibrium

神野　拓哉（富山大・都市）　　原　誠人（一橋大・経済）　　三ツ井　孝仁（順天堂大・健康）
齊木　吉隆（一橋大・経営）　　米田　剛（一橋大・経済）
Takuya JINNO, University of Toyama
Masato HARA, Hitotsubashi University
Takahito MITSUI, Juntendo University
Yoshitaka SAIKI, Hitotsubashi University
Tsuyoshi YONEDA, Hitotsubashi University
E-mail: jinno@sus.u-toyama.ac.jp

Predicting the time evolution of tropical cyclone (TC) intensity remains challenging, even with state-of-the-art numerical weather prediction models. The timing of cyclogenesis is highly sensitive to the initial conditions of the simulations. We conducted an ensemble of three-dimensional radiative–convective equilibrium simulations that include the effect of planetary rotation. Macroscopic atmospheric variables related to TC intensity were used to construct a data-driven model based on reservoir computing. It is found that ensemble time series which include the dynamics of self-organized cloud clusters before the formation of TCs contributed to the forecast improvement of early formation and following intensification of TCs.

1．背景

大気放射や水蒸気など複数の物理過程が複雑に関与する熱帯大気の中で、熱帯低気圧はメカニズムの理解と予測に関して特に多くの課題を残した現象である。熱帯低気圧はその最大強度の周辺にカオス的なレジームが存在することが確認されている [1]。一方で熱帯低気圧の強度の予測は、形成の初期とその後の急発達の段階でその不確かさが最大になることが知られている [2]。大気の流れは全体としては大自由度の系であるが、熱帯低気圧の形成に伴う強度のダイナミクスは簡略な力学系モデルで記述できることが示唆されている [3]。

本研究では、熱帯低気圧の強度変化の中でも形成と初期の発達の段階に着目し、機械学習モデルを用いた予測可能性について議論する。エコーステートネットワーク(ESN)による時系列予測は、間欠的なレジームの変化を伴うような非定常な系に対しても有効であることが示されている [4]。熱帯低気圧の振る舞いを示す時系列データとして、惑星の回転を導入した 3 次元放射対流平衡のアンサンブル数値実験を実施し、強度の指標を学習・予測する枠組みを構築した。

2．f 面放射対流平衡実験

現実の大気における熱帯低気圧の形成と時間発展はより時空間スケールの大きな大気と海洋の変動や緯度の変化から強く影響を受ける。本研究では外的な強制を除いて理想化した環境での予測可能性を議論するために、海面水温とコリオリパラメーターを時間・空間的に一定の値に固定した放射対流平衡実験で自発的に形成される熱帯低気圧を対象とする。

数値実験モデルとして RIKEN SCALE-RM 5.5.2 を用いた。水平格子間隔は 4 km、鉛直格子間隔は地表付近における 100 m から上端高度 28 km における 500 m まで漸増するストレッチグリッドに設定した。実験領域は一つの熱帯低気圧が収まる一辺 1,024 km の正方形領域とし、水平 2 方向に周期境界条件を設定した。物理過程としてバルク方式の地表面熱フラックスとインタラクティブな大気放射のパラメタリゼーションを使用し、積雲のパラメタリゼーションは使用していない。北半球熱帯域での熱帯低気圧の発生が活発な環境場に合わせて、海面水温は 304 K、コリオリパラメーターは 3.77×10^{-5} s^{-1}（北緯 15 度に相当）に固定した。初期条件は風速ゼロとし、典型的な熱帯域の温位の鉛直分布に平均振幅 0.01 K の確率的なノイズを加えた全 150 ケースのアンサンブル実験をそれぞれ 50 日間時間発展させた。

図 1 に単一の実験ケースにおいて実験開始直後から熱帯低気圧が発達するまでの 10 m 高度の水平風速の水平分布を示す。水平準一様な初期条件から数日間は領域全体にわたって散発的に積雲対流が発生し、10 日程度かけて積雲が密集した複数の湿潤なクラスターとその周辺の乾燥した領域への分離が進行する。これは回転のない放射対流平衡で見られる雲の自己組織化現象と同様である。その後、雲クラスターのうちのいずれかが回転を強め、地表付近の最大風速で特徴づけられる低気圧性の渦状構造が発達する。

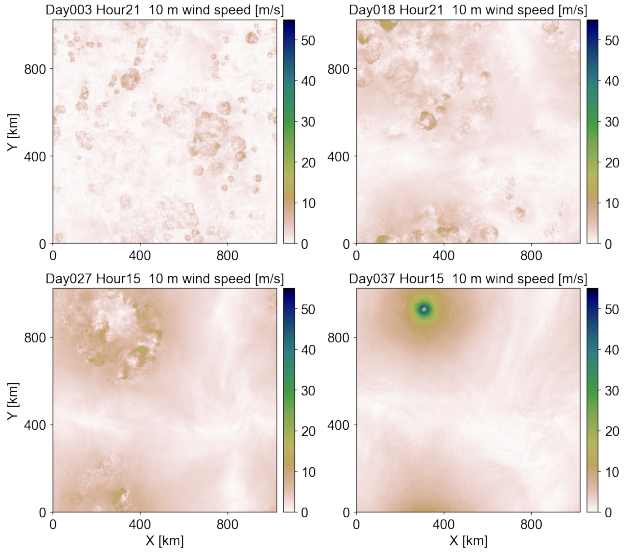


Fig. 1 Time evolution of near-surface horizontal wind speed in a numerical simulation.

3．ESN モデル

ESN はリザバーコンピューティングの枠組みに基づく再帰的ニューラルネットワークの一種であり、入力、リザ

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

バー、出力の 3 層から成り、リザバー層と出力層の状態ベクトル$\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)$は式(1)、(2)に基づいて時間発展する。

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = (1-\alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh\left(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + b\mathbf{I} + \sigma_{\text{in}}\mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}(t)\right) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(t+\Delta t) = \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(t+\Delta t) \quad (2)$$

ただし$\mathbf{W}_{\text{in}}$は入力・リザバー間の結合重み行列、σ_{in}は入力のスケーリング定数、$\mathbf{A}$はリザバーの再帰結合重み行列を表す。トレーニングデータによってリザバーから出力層への結合の重み行列$\mathbf{W}_{\text{out}}$のみを学習し、$\mathbf{W}_{\text{in}}$と$\mathbf{A}$は乱数で決定する。本研究では入出力変数として熱帯低気圧の強度指標の遅延座標系を用いる。放射対流平衡実験の全 150 ケースのうち、100 ケースをトレーニングに、25 ケースをモデルのハイパーパラメーター選択に、25 ケースをモデルの予測精度のテストに使用した。なお時系列データの時間刻みは 1 ステップを 3 時間としている。

4. 結果・議論

入出力変数となる 3 次元放射対流平衡実験中で生じる熱帯低気圧の強度の指標として、高度 10 m の水平風速場の回転成分のうち各時間ステップでの領域内最大値$V_{\max}$を用いる。$V_{\max}$がハリケーンの基準である 33 m/s を超えた時刻を熱帯低気圧の発生時刻と定義する [5]。図 2 に全 150 ケースの$V_{\max}$の時間変化を示す。実験開始から 450 時間程度の雲クラスター形成の段階では形成位置が異なるのみで、アンサンブルメンバーごとの$V_{\max}$の時系列上の違いは大きくない。その後、熱帯低気圧の発達する過程は突発的であり、実験ケースごとに発生時刻の分散が大きい。

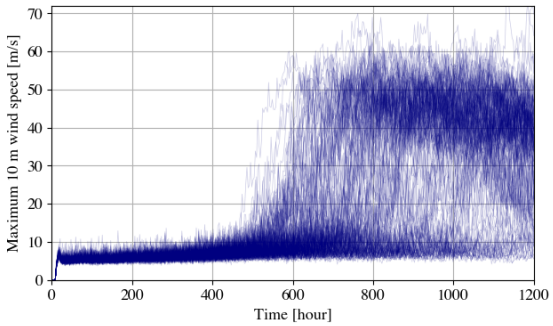


Fig. 2 The ensemble time evolution of simulated TC intensity.

実験開始から時刻t_sまでの$V_{\max}$の時系列を用いてリザバー層をスピンアップし、以降の時間変化を自励系として予測した。アンサンブルメンバーのうち最も早く発生した熱帯低気圧の発生時刻 1 ステップ前から予測を開始した場合（$t_s = 549$ h)の結果の一部を図 3 に示す。図 3a では風速の上昇が始まった直後から約 100 時間後の熱帯低気圧の発生を高い精度で予測しており、図 3b ではt_sから 400 時間以上先の熱帯低気圧発生に対し、予測の誤差を 30 時間以内に留めている。一方実験期間を通して熱帯低気圧の発達が弱い図 3c のようなケースでは、発生時刻の予測誤差が大きくなる場合も存在する。

熱帯低気圧の発生に関する予測可能な時間スケールを推定するため、数値実験・ESN モデル予測間の発生時刻の誤差の絶対値をテストデータ 25 ケースについて平均した TC genesis time MAE のt_sに対する依存性を図 3d に示す。灰色の実線はトレーニングデータ 100 ケースでの発生時刻のアンサンブル平均をテストデータでの発生時刻の予測値として用いた場合の値である。ESN モデルによる予測は$t_s >$ 420 h の範囲でアンサンブル平均よりも発生時刻の予測精度が高く保たれている。

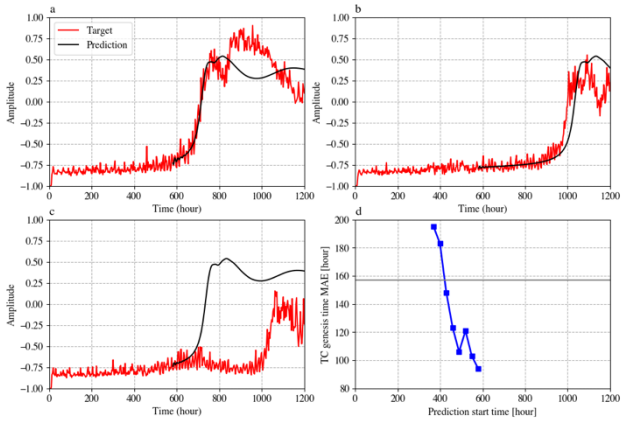


Fig. 3 Comparison between the prediction and the target of TC intensity. Ensemble members (a) case 1, (b) case 8, and (c) case 20. Here, $V_{\max}$ is rescaled so that 0 m/s corresponds to -1 and 33 m/s corresponds to 0. (d) Mean absolute error of predicted time of tropical cyclogenesis as a function of t_s.

放射対流平衡のアンサンブル実験において実験開始から 420 時間程度までの時間発展は、数百 km スケールの積雲対流のクラスターとそれに伴う大規模な大気の循環流が形成されるまでの過程に相当する。大規模循環の地表付近での風速場の情報を$V_{\max}$の時系列として取り入れることで、熱帯低気圧の強度変化の予測精度が向上していると考えられる。

参考文献

1) C. Kieu, W. Cai, and W.-T. L. Fan: On the existence of low-dimensional chaos of the tropical cyclone intensity in an idealized axisymmetric simulation, Journal of the Atmospheric Sciences, 80, 797 – 811, 2023.
2) K. Emanuel and F. Zhang: On the predictability and error sources of tropical cyclone intensity forecasts, Journal of the Atmospheric Sciences, 73, 3739 – 3747, 2016.
3) M. DeMaria: A simplified dynamical system for tropical cyclone intensity prediction, Monthly Weather Review, 137, 68 – 82, 2009.
4) L.-W. Kong, H. Fan, C. Grebogi, and Y.-C. Lai: Emergence of transient chaos and intermittency in machine learning, Journal of Physics: Complexity, 2, 035014, 2021.
5) A. A. Wing, S. J. Camargo, and A. H. Sobel: Role of radiative–convective feedbacks in spontaneous tropical cyclogenesis in idealized numerical simulations, Journal of the Atmospheric Sciences, 73, 2633 – 2642, 2016.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

情報を保存する乱流モデル：チャネル乱流への適用
Information-preserving turbulence model: application to channel turbulence

橋本　丈瑠（東理大院）　　塚原　隆裕（東理大）　　荒木　亮（東理大）
Takeru HASHIMOTO, Tokyo University of Science
Takahiro TSUKAHARA, Tokyo University of Science
Ryo ARAKI, Tokyo University of Science
Email: 7525544@ed.tus.ac.jp; araki.ryo@rs.tus.ac.jp

Large-eddy simulation is an important approach for numerical simulation of turbulent flows in engineering. Recently, data-driven approaches such as machine learning have been actively proposed. In this study, we propose a sub-grid scale model by interpreting the local equilibrium hypothesis as "information preservation". Our model reproduces key statistics of wall turbulence without incorporating a wall function. This study highlights the utility of the information-theoretic picture of turbulence in its modeling.

1．緒言

乱流の数値シミュレーションを低コストかつ高精度に行う手法として，Large-Eddy Simulation（LES）が広く用いられている．近年では，機械学習などを用いたデータ駆動的な手法に基づくモデルが活発に提案されてきた[1]．本研究では，発達乱流中のスケール間局所平衡仮説を「情報の保存」として定式化する Sub-Grid Scale（SGS）モデルを提案する．

2．情報理論

情報理論は Shannon が提案した情報通信の理論[2]であり，確率変数 X の平均的不確かさを表す Shannon エントロピを，X がとりうる事象 $x \in X$ の確率分布 $p(x)$ を用いて

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

で定義する．また，2 つの確率変数 X, Y が共有する情報量を，相互情報量

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{2}$$

で定義する．ここで $H(X,Y)$ は同時エントロピである．

3．SGS モデルの構築

LES の支配方程式は，粗視化した連続の式と Navier–Stokes 方程式

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \overline{f}_i \tag{4}$$

である．ここで，u_i は速度場，p は圧力場，f_i は外力場であり，ρ, ν は流れを支配するパラメータである密度と動粘性係数である．LES の Grid Scale（GS）で粗視化するフィルタ操作 $\overline{(\cdot)}$ により登場した SGS 応力

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \tag{5}$$

は GS の流れ場から計算できず，モデル化が必要である．SGS 応力を GS 速度の関数と仮定すれば，変形速度テンソル S_{ij} と回転テンソル Ω_{ij} からなる 5 つの項に展開できる[3]．本研究ではモデルの簡略化のため，その中で最も重要な 2 項

$$\tau_{ij}^{\mathrm{mod}} = C_1 f_1 \Delta^2 \,|\boldsymbol{S}| S_{ij} + C_2 f_2 \Delta^2 (S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj}) \tag{6}$$

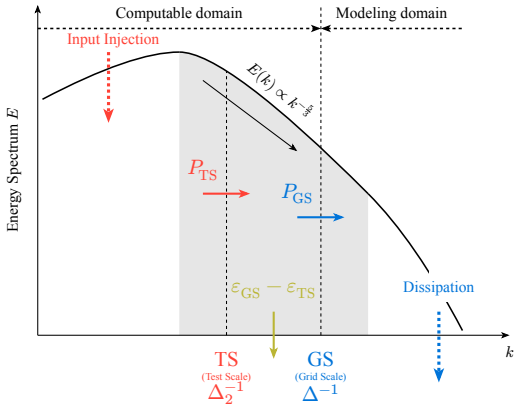


Fig. 1　Schematic energy spectrum with energy balance. Energy production at the test and grid scales are denoted by P_{TS} and P_{GS}, respectively. Cumulative energy dissipation rate up to the test and grid scales are denoted by $\varepsilon_{\mathrm{TS}}$ and $\varepsilon_{\mathrm{GS}}$, respectively.

で SGS 応力をモデル化した．ここで，$f_i(\boldsymbol{x}, t)$ は S_{ij} と Ω_{ij} の不変量からなる関数で，$C_i(t)$ は時間に依存するモデルパラメータ，Δ は GS の格子幅を表す．

まず，未知関数 $f_i(\boldsymbol{x}, t)$ を決定する．本研究では壁乱流に対しても適用可能なモデルを目指し，coherent 構造関数

$$F_{\mathrm{CS}} = \frac{\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}}{\Omega_{kl}\Omega_{kl} + S_{kl}S_{kl}} \tag{7}$$

を用いた[4]．壁面近傍での漸近要件を考慮し，$f_1 = |F_{\mathrm{CS}}|^{3/2}, f_2 = |F_{\mathrm{CS}}|^2$ と定義した．

次に，パラメータ $C_i(t)$ を推定する．図 1 に示すように，格子幅 Δ に対応する GS と，それよりも大きい $\Delta_2 (> \Delta)$ に対応するテストスケール（TS）を導入する．いま，GS–TS 間のスケール間局所平衡関係をエネルギ生成率 $P = \tau_{ij}S_{ij}$ とエネルギ散逸率 ε で書くと，

$$\langle P_{\mathrm{GS}} + \varepsilon_{\mathrm{GS}} \rangle_v = \langle P_{\mathrm{TS}} + \varepsilon_{\mathrm{TS}} \rangle_v \tag{8}$$

が得られる[5]．ただし，$\langle\cdot\rangle_v$ は空間局所領域 $v \in V$ における平均を表す．エネルギ生成に含まれる τ_{ij} を τ_{ij}^{mod} に置き換えて Germano の恒等式で変形すると，上式は

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\underbrace{\left\langle -\left(\widetilde{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}-\tilde{\bar{u}}_i\tilde{\bar{u}}_j\right)\tilde{S}_{ij}+\varepsilon_{\mathrm{TS}}\right\rangle_v}_{\Gamma_1} = \underbrace{\left\langle \widetilde{\tau^{\mathrm{mod}}}_{ij}\tilde{S}_{ij}-\tau_{ij}^{\widetilde{\mathrm{mod}}}S_{ij}+\varepsilon_{\mathrm{GS}}\right\rangle_v}_{\Gamma_2(C_1,C_2)} \tag{9}$$

と書き換えられる．ここで，$\widetilde{(\cdot)}$ は TS での粗視化を表す．いま，Γ_1 は GS 速度のみで定義でき，$\Gamma_2(C_1,C_2)$ はパラメータ $C_1(t), C_2(t)$ の関数となる．本研究では，このスケール間局所平衡関係を情報の観点から相互情報量の最大化問題

$$C_1, C_2 = \arg\max_{C_1,C_2} I(\Gamma_1 : \Gamma_2) \tag{10}$$

とみなしてパラメータを推定した．ここまでで提案した Information Preserving Coherent Structure Model（IP-CSM）は先行研究で提案された IP-SGS モデル[6] と同様のアイデアに基づくが，パラメータの決定方法を改善している．

4．結果・考察

圧力で駆動されるチャネル乱流を対象に，IP-CSM を a-posteriori テストで評価する．図 2 に平均速度と Reynolds せん断応力の壁垂直方向分布を示す．比較対象として，Smagorinsky モデル[7] と Coherent Structure モデル[4]（CSM）の結果も示す．両者は共に，式 6 の右辺初項のみを用いて

$$\tau_{ij}^{\mathrm{smag}} = C_1(f_s\Delta)^2\,|\boldsymbol{S}|S_{ij} \quad \text{with} \quad C_1 = -2\cdot 0.17^2 \tag{11}$$

$$\tau_{ij}^{\mathrm{CSM}} = C_1\Delta^2\,|F_{\mathrm{CS}}|^{\frac{3}{2}}\,|\boldsymbol{S}|S_{ij} \quad \text{with} \quad C_1 = -0.1 \tag{12}$$

と定義される．ただし，これらのモデルではパラメータ C_1 が事前に定数で設定されていることに注意する．また，オリジナルの Smagorinsky モデルは壁を表現できないため，van Driest の減衰関数

$$f_s = 1-\exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \quad \text{with} \quad A^+ = 25 \tag{13}$$

を適用した[8]．ここで，$(\cdot)^+$ は摩擦速度 u_τ と粘性長さスケール ν/u_τ による規格化である．

本研究で提案した IP-CSM は a priori なパラメータを持たないにも関わらず，チャネル乱流の統計を既存の SGS モデルと同等の精度で再現した．具体的には，図 2 (a)の流速分布では粘性低層における線形則と乱流層における対数則が，(b)の Reynolds せん断応力では $\propto y^3$ 則がよく再現された．なお，IP-CSM は周期箱乱流に対してもその統計とダイナミクスをよく再現した[9]．

5．結言

本研究では，局所平衡仮説を情報の保存と解釈するデータ駆動型 SGS モデルを提案した[9]．本手法は周期箱乱流，壁乱流の両方で既存モデルと同等の精度を達成し，乱流の情報理論描像がそのモデリングに有用であることを示した．

謝辞

研究は JST さきがけ JPMJPR25K1 および JSPS 科研費 21H05007，24K22942 による助成を受けた．

参考文献

1) S. L. Brunton, B. R. Noack and P. Koumoutsakos. Machine learning for fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 52, No. 1, pp. 477–508, 2020.

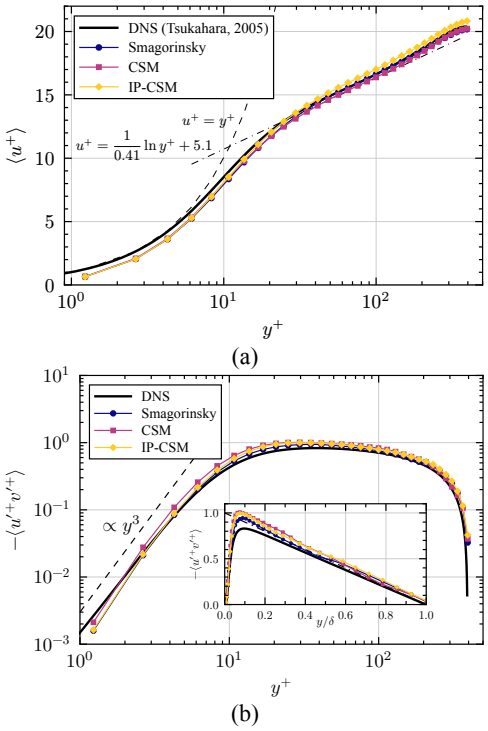


Fig. 2 (a) Mean velocity and (b) Reynolds shear stress profile of wall turbulence. The dashed and dot-dash lines in (a) are the viscous sublayer and log-law scaling, respectively. The inset of (b) replots the main plot in linear-linear axes. DNS and some conventional SGS models' results are shown for comparison.

2) C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 379–423, 1948.
3) Thomas S. Lund and Evgeny Novikov, Parameterization of subgrid-scale stress by the velocity gradient tensor, *Proceedings of NASA Annual Research Briefs*, 1993.
4) H. Kobayashi. The subgrid-scale models based on coherent structures for rotating homogeneous turbulence and turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 4, 2005. 045104.
5) T. Murota, A dynamic subgrid scale model of eddy viscosity type deduced from a local inter-scale equilibrium assumption of energy transfer, *Third Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, 2003. Begel House Inc..
6) A. Lozano-Durán and G. Arranz. Information-theoretic formulation of dynamical systems: causality, modeling, and control. *Physical Review Research*, Vol. 4, Jun 2022. 023195.
7) J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, pp. 99–164, 1963.
8) E. R. van Driest. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 11, pp. 1007–1011, 1956.
9) T. Hashimoto, T. Tsukahara and R. Araki. Information-preserving SGS model based on the local inter-scale equilibrium hypothesis. in prep.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

波数空間における定流束状態を用いた乱流のアンサンブルモデル
Ensemble model of turbulence based on states of constant flux in wavenumber space

吉田　恭（筑波大・数理物質）
Kyo YOSHIDA, University of Tsukuba
E-mail: yoshida.kyo.fu@u.tsukuba.ac.jp

An ensemble model of turbulence proposed by the author (K. Yoshida, Phys. Rev. E **106**, 045106 (2022)) is reviewed. The ensemble consists of all the states in which a constant flux of an inviscid conserved quantity, such as energy or enstrophy in two-dimensional fluids, in wavenumber space is sustained during a certain time interval under inviscid dynamics. To support the validity of the model, it was attempted to numerically sample such states with constant enstrophy flux in two-dimension fluid using a Monte-Carlo method. The results show that the energy spectra of the sampled states with quasi-constant enstrophy flux are consistent with the known spectrum $E_k = C_K \eta^{2/3} k^{-3} \left(\ln(k/k_\mathrm{b})\right)^{-1/3}$, where η is the constant value of enstrophy flux, k_b is the lower bound of the constant-flux range, and C_K is a universal constant.

1．はじめに

粘性流体の運動は決定論的なNavier-Stokes方程式で記述されるが，高Reynolds数では，その解の速度場$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$は様々な時空間スケールの変動が励起され乱雑に振る舞う乱流状態となり，確率を用いた解析が適当であろうと期待される．ただし，支配方程式に基づき乱流の種々の統計量を求める方法論は確立していない．

ここで熱平衡系の統計力学を振り返ってみると，Gibbsによるアンサンブル描像の整備および後続の洗練によって，その方法論が完全に確立している．ハミルトニアンが与えられたら，状態空間にカノニカル・アンサンブル，ミクロカノニカル・アンサンブルなどのアンサンブルモデルを導入すれば，諸々の統計量は対応する量のアンサンブル平均で表される．アンサンブル描像の根拠づけについては，典型性に基づく議論など最近でも研究の対象であるが，少なくとも熱平衡状態についてはアンサンブル描像による処方箋の有用性には揺るぎがない．

乱流にも適切なアンサンブルモデルを導入できないかというのは自然な問いである．駆動散逸力学系の一般論としてはアトラクタ上の不変測度は一つの候補であるが，それについて厳密に数学的な解析は難しい．不変測度の代替に不安定周期軌道を数値的に探索する研究（例えば文献[1]）もあるが，これもReynolds数の上昇とともに困難になる．外力場を確率変数として扱い場の理論的な定式化（例えば文献[2]）もなされているが，その具体的解析は難しい．完結近似において，具体的にアンサンブルを指定することを避け，適当な仮定の下でアンサンブル平均による場の1次または2次までの低次モーメントについて閉じた式を導出する．特にラグランジュ2点完結近似（例えば文献[3,4]）は，乱流のエネルギースペクトルのKolmogorov則を普遍定数の見積もりまで含めて導くことに成功している．完結近似についての包括的なレビューは文献[5]等を参照にされたい．ここに挙げた例も含めてこれまで乱流の統計理論について様々な観点から研究が行われ一定の知見が蓄積されてはいるが，熱平衡系統計力学におけるカノニカル・アンサンブルなどのアンサンブル理論のような決定版はいまだ無いというのが現状だろう．

一方でRichardson[6]以来，乱流におけるエネルギーカスケードの現象論は広く受け入れられている．外力により大きいスケールの渦にエネルギーが注入され，段階的に次の小さい渦にエネルギーが輸送され，やがて一番小さいスケールの渦で粘性によりエネルギーが散逸する．統計的定常状態ではエネルギー注入率とエネルギー輸送率とエネルギー散逸率がバランスして，その値ϵが系を特徴づける重要なパラメタとなる．Kolmogorovの一様等方性乱流の理論[7]もϵを中心に据えて展開される．

最近，著者はこのエネルギーカスケードの現象論を積極的に取り入れた乱流のアンサンブルモデルの構築を試みており[8]，本講演ではその概要を説明する．

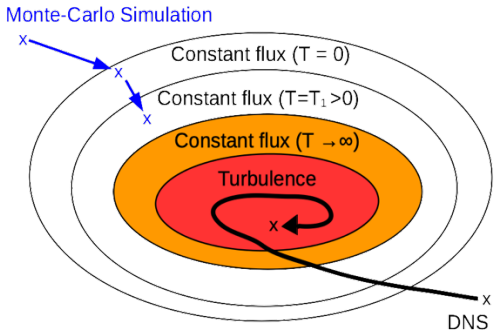


Fig. 1 Conceptual diagram of ensembles of states with constant flux over time intervals and the ensemble of turbulence.

2．アンサンブルモデル

エネルギーカスケードは，波数空間の言葉で言えば，ある波数kより低波数側の領域から高波数側の領域に非線形相互作用で輸送されるエネルギー流束Φ_kが，慣性領域において波数によらず一定値ϵとなり，それが時間発展で維持されることである．この状態を定流束状態と呼び，その維持時間をTで表すことにする．数々のNavier-Stokes方程式の直接数値シミュレーション（DNS）において，計算資源の制約により限られた慣性領域範囲内ではあるが，定流束状態$\Phi_k \approx \epsilon$に緩和することが確認されている（例えば文献[9]）．これは乱流状態を外力のあるNavier-Stokes方程式のアトラクタ上での点と捉えた場合，乱流状態の集合が十分長いTについての定流束状態の集合に含まれることを示唆する．（Fig. 1参照）．

ここで一つの仮説を考える．「乱流状態の集合と十分長いTについての定流束状態の集合は，稀な非典型的状態を除いて一致する」のではないか．この仮説が正しいとすると，十分長いTについての定流束状態の集合を乱流のアンサンブルモデルと考えることができる．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

以降では，状態（速度場）を象徴的に $\boldsymbol{u}$ で表し，$\boldsymbol{u}$ を期条件に外力なし，非粘性（つまり Euler 方程式）で時間発展した解を $\boldsymbol{u}(t)$ で表す．アンサンブルモデルは状態空間上の確率密度関数 $P(\boldsymbol{u})$ で指定される．ここで，

$$P(\boldsymbol{u}) := C \prod_{n=0}^{N_t} \prod_{m=0}^{N_k} \delta\left(\Phi_{k_m}\left(\boldsymbol{u}(t_n)\right) - \epsilon\right) \quad (1)$$

とする．ただし $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数，C は確率の規格化定数，ϵ はエネルギー流束に対応する定数，$k_0 < k_1 < \ldots < k_{N_k}$ で $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_t}$ である．ここで，$N_k, N_t \to \infty$，$k_{N_k}, t_{N_t} \to \infty$，$\min_m(k_{m+1} - k_m)$，$\min_m(t_{n+1} - t_n) \to 0$ とすることで，形式的に定流束状態のアンサンブルを構成できる．

式が明示的に与えられているものの，このアンサンブルに基づいて種々の量の平均を求めることは困難であり，何らかの近似的解析手法を開発する必要がある．しかし，ここではその代わりにこのモデルに関して数値計算的アプローチを試みる．

3．定流束状態の数値的探索

定流束状態を力学的時間発展によらず数値的に探索することを考える（Fig. 1 参照）．ランダムサンプリングされた定流束状態と DNS で得られた乱流状態の種々の量を比較してそれらが同等であれば，前節での仮説が正しいと数値的に検証されたと言えよう．また熱平衡系の統計力学でも期待されている「アンサンブル内のほとんどの状態は，興味ある物理量について同じ値を持つ」という典型性の性質が，ここでのアンサンブルについても成り立つならば，1 つの定流束状態を適切にサンプリングできれば，その状態から必要な物理量の情報が得られることになる．

文献 [8]では，計算資源の節約のため手始めに，2 次元乱流について瞬時的（$T = 0$）定エンストロフィー流束状態のモンテカルロ法による数値探索を試みている．状態 $\boldsymbol{u}$ のエンストロフィー流束を $\Phi_k^{\Omega}(\boldsymbol{u})$ と表す．状態 $\boldsymbol{u}$ の定エンストロフィー流束状態 $\Phi_k^{\Omega}(\boldsymbol{u}) = \eta$ からのずれを適切に誤差関数 $\Delta(\boldsymbol{u})$ を定義して評価する．まず，乱数で初期の状態 $\boldsymbol{u}$ 選ぶ．また乱数で $\boldsymbol{u}$ からわずかにずれた状態 $\boldsymbol{u}'$ を選ぶ．$\Delta(\boldsymbol{u}') \le \Delta(\boldsymbol{u})$ の場合は $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}'$ に更新し，それ以外の場合は $\boldsymbol{u}$ をそのままにする．これを繰り返すことにより $\Delta(\boldsymbol{u}) \approx 0$ となれば，近似的に定流束状態が探索されたことになる．

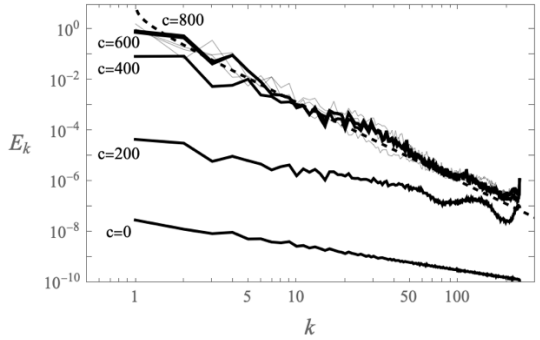


Fig. 2 Energy spectra of obtained states with quasi-constant enstrophy flux. Dashed line shows the scaling spectrum. Reprinted from Ref. 8.

モンテカルロ法で得られた瞬時的（$T = 0$）近似的定エンストロフィー流束状態のエネルギースペクトルが Fig. 2 に示されている．全ての波数モードに 1 回ずつモンテカルロ試行する過程を 1 サイクルとして，サイクル数を c で表している．$c = 800$ の状態のエネルギースペクトルは，ラグランジュスペクトル完結近似によって得られた乱流のエンストロフィーカスケード領域におけるエネルギースペクトル [10] $E_k = C_K \eta^{2/3} k^{-3} \left(\ln(k/k_b)\right)^{-1/3}, C_K = 1.81$（点線）と整合している．ただし，$\eta$ は定エンストロフィー流束の値でk_bは定エンストロフィー領域の下端波数である．

4．まとめと展望

数値探索で得られた数値探索で得られた瞬時的（$T = 0$）近似的定エンスロィー流束状態がエネルギースペクトルにおいて乱流状態と整合することは，第 2 節の仮説に対して肯定的な結果である．ただし，これは初歩的な検証であり，多くの課題が残されている．まず，定流束が維持される時間が $T > 0$ となる場合はどうなるのか，定流束状態と乱流状態の類似性を見るのにエネルギースペクトル以外にどのような量を調べればいいのか，また数値探索の初期値などに結果は依存しないのか，などの問題がある．これらの問題については，文献 [11]で扱っている．更に，同様の数値的探索を 3 次元乱流のエネルギーカスケード領域について行うことが重要である．現行の数値的探索は愚直で非バイアス的であるが非効率的であり，その効率化も課題である．

参考文献

1) G. Kawahara and S. Kida, J. Fluid Mech. **449**, 291 (2001).
2) P. Martin, E. Siggia, and H. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
3) R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 575 (1965).
4) Y. Kaneda, J. Fluid Mec. **107**, 131 (1981).
5) Y. Zhou, Phys. Rep. **935**, 1 (2021).
6) L. F. Richardson, Weather prediction by numerical processes (Cambridge University Press, 1922) p. 66.
7) A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941), (reprinted in Proc. R. Soc. Lond. A **434**, 9).
8) K. Yoshida, Phys. Rev. E **106**, 045106 (2022).
9) T. Ishihara, K. Morishita, M. Yokokawa, A. Uno, and Y. Kaneda, Phys. Rev. Fluids **1**, 082403(R) (2016).
10) Y. Kaneda, Phys. Fluids **30**, 2672 (1987), erratum: see the reference in T. Ishihara and Y. Kaneda, Phys. Fluids, **13** 544 (2001).
11) K. Yoshida, arXiv:2507.04853 [physics.flu-dyn] .

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-03：乱流のダイナミクス）

2026年5月16日(土) 16:25 ~ 17:25 | E会場(環境棟：6階講義室)

OS-03 (4)

座長：玉野真司（名古屋工業大学）

16:25 ~ 16:40

[15010] チャネル高分子流れにおける壁面せん断応力計測に関する研究

*浅岡 純平[1]、辻 義之[1] (1. 名古屋大学大学院工学研究科エネルギー理工学専攻)

16:40 ~ 16:55

[15011] 圧縮性等方乱流におけるショックレットの幾何学的解析

*櫻井 幹記[1]、立石 隼啓[2]、石原 卓[2] (1. 横浜国立大学、2. 岡山大学)

16:55 ~ 17:10

[15012] 非対称流路ネットワークでバクテリア集団運動のトポロジカルエッジ状態をデザインする

*内田 善人[1]、西口 大貴[2]、竹内 一将[1] (1. 東京大学、2. 東京科学大学)

17:10 ~ 17:25

[15013] 滑らかなオイラー流における渦輪の非線形スケール局所変形

*米田 剛[1] (1. 一橋大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

チャネル高分子流れにおける壁面せん断応力計測に関する研究
Study on Wall Shear Stress Measurement in Polymer Channel Flow

浅岡　純平（名古屋大・工）　　辻　義之（名古屋大・工）
Jumpei ASAOKA, Nagoya University
Yoshiyuki TSUJI, Nagoya University
FAX: 052-789-4692
E-mail: asaoka.jumpei.m4@s.mail.nagoya-u.ac.jp

高分子添加による抵抗低減効果のメカニズム解明に向けて、壁面近傍の応力構造の理解は極めて重要である。本研究では、高分子添加流体を対象に、圧力損失測定から得られる平均壁面せん断応力と、物質輸送と運動量輸送のアナロジーを利用した電気化学的計測手法から得られる壁面せん断応力の比較検討を行った。チャネル乱流場において、複数の高分子濃度や Re 数条件下における応力評価を実施した。その結果、高分子濃度の増加に伴い、圧力損失に基づく応力値に対して電気化学的計測に基づく応力値が相対的に小さくなるという有意な差異が生じることが確認された。本発表では、この計測手法間の差異について、圧力損失が壁面における総応力を捉える一方で、電気化学的計測が壁面での速度勾配に由来する粘性応力を評価しているという仮説を提示する。得られた応力の差分が壁面近傍における高分子応力項に起因する可能性について報告し、高分子が応力場に与える影響について議論する。

１．はじめに

流体に微量の高分子を添加することにより摩擦抵抗が著しく低減する現象は、流体輸送システムの省エネルギー化に資する重要な特性として知られており、その流体力学的メカニズムの解明に向けて、これまで数多くの研究が行われてきた。抵抗低減効果の定量的評価や流路内における乱流構造の変調を理解する上で、壁面せん断応力を正確に把握することは不可欠である。一般に、平均的な壁面せん断応力は圧力損失測定に基づき、検査体積における全体の運動量バランスから算出される。一方、壁面近傍における局所的かつ瞬時の壁面せん断応力の評価には、物質輸送と運動量輸送のアナロジーを利用した電気化学的計測手法が有効である。ニュートン流体においては、これら原理の異なる計測手法から得られる壁面せん断応力は一致する。しかし、高分子添加流体では流体中に弾性が付与されるため、せん断応力は粘性応力項およびレイノルズ応力項に加えて、高分子応力項を含む形で記述される [1]。壁面上の境界条件に注目すると、壁面せん断応力は粘性応力項と高分子応力項のみから構成される。

本研究では、圧力損失測定および電気化学的計測手法を用いて高分子水溶液の壁面せん断応力を測定し、両者から得られる結果の差異に着目した。全体の運動量バランスに基づく圧力損失測定が壁面における総せん断応力を反映するのに対し、電気化学的計測手法による結果は主として粘性応力項を評価している可能性があると考えられる。本発表では、この仮説に基づき、両計測結果の差分を壁面における高分子応力項として評価する新たな試みについて報告する。

２．実験手法及び条件

実験ループの全体概略図を Fig. 1 に示す。流路は，試験部であるアクリル製チャネルダクト，円管，タンク，ポンプおよび流量計から構成されている。チャネルダクトの試験部には，作用電極板を設置するための開口部および対極として用いる Ni 板が設けられている。チャネルダクトの寸法は，高さ 10 mm，幅 120 mm，全長 2040 mm である。チャネル入口から試験部までの距離は 1330 mm とし，計測位置に到達するまでに流れが十分に発達するよう考慮した。高分子には、電気化学的計測手法に影響の少ない、非イオン性かつ水溶性を有するポリアクリルアミドを使用した。各実験条件は Table 1 に示す。

Table 1　実験条件

Re_b	(-)	5500, 7000, 8600, 10000, 11700
Temperature	(℃)	20
Polymer concentration	(ppm)	0, 50, 100, 150, 200, 250, 300
Measurement time	(s)	60
Measurement Frequency	(Hz)	5000
Polymer (Polyacrylamide)		M_v= 6×10^6

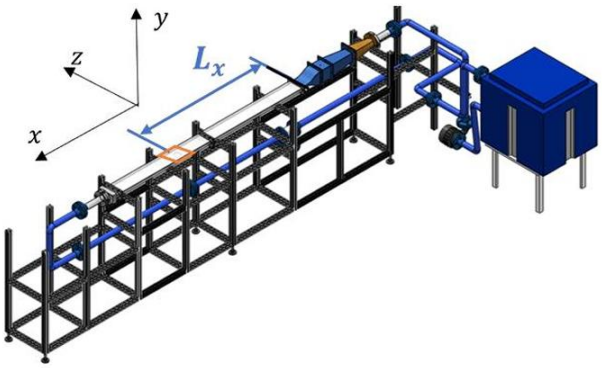


Fig. 1 試験ループ全体図

２．１　圧力損失測定

圧力損失測定では、流路の測定部の上流および下流に設けた圧力孔の間の圧力差を測定することにより、壁面せん断応力を算出した。圧力孔はチャネル底面にあり、測定区間の距離は 0.8 m である。得られた圧力損失から、チャネルの寸法と測定区間距離を用いた全運動量のバランスの式に基づいて、平均の壁面せん断応力を算出した。

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\tau_{w,p} = \frac{ab}{2(a+b)} \cdot \frac{\Delta P}{L} \tag{1}$$

２．２　電気化学的計測手法

本研究では運動量輸送と物質輸送のアナロジーを利用した電気化学的計測手法を用いた。本手法では、流体中の運動量の輸送特性が、電極表面における物質の移動特性と対応することを利用し、物質移動量から壁面せん断応力を間接的に評価した。具体的には、作動流体である電解液中に酸化体および還元体を溶解させ、チャネル底面に設置した作用電極に電圧を印加する。これにより、電極表面では酸化還元反応が生じ、その際に流れる電流値を測定する。印加電圧を適切に設定することで、反応はイオンの拡散速度によって律速される状態となり、測定される電流値は電極近傍における物質移動量、すなわち流れ場の特性を反映する。限界電流と物質移行係数の関係は式(2)で示される。

$$\tilde{k} = \frac{i}{An_eFc_b} \tag{2}$$

電極の寸法および配置は Fig. 2 に示す通りであり、スパン方向に円形電極を円盤プレートに埋め込んだ。円盤プレートは測定部であるチャネル底面に設置した。円形電極の直径は 0.3 mm で間隔は 1.25 mm である。

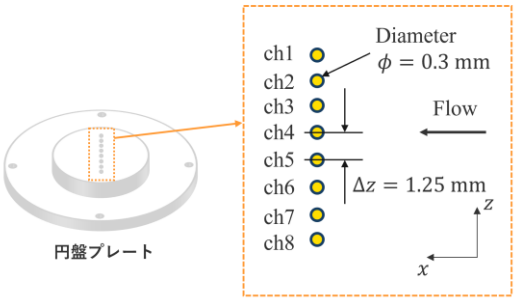


Fig. 2 円盤プレート及び電極寸法

計測された電流値から、物質移動と運動量輸送の関係式を用いて壁面せん断応力を算出する。濃度境界層は電極表面上のみに十分薄い層として形成される。Hanratty および Campbell によれば、十分に小さな点電極に対しては、濃度境界層の厚さは極めて薄く、速度境界層における粘性底層内に存在する [2]。この条件下では、壁面せん断応力と物質移行係数との関係は式(3)で与えられる。ただし、式(3)に含まれる定数Cは、電極の形状及び寸法の影響を考慮したものであり、点電極の場合には$C = 0.807$とされている [3, 4]。

$$\tilde{\tau}_{w,e} = \frac{L_e\mu}{{D_f}^2}\left(\frac{\tilde{k}}{C}\right)^3 \tag{3}$$

３．結果

圧力損失測定と電気化学的計測手法、それぞれの手法から算出された結果を比較した。結果を図 1 に示す。横軸は高分子濃度、縦軸は圧力損失で得られた結果に対する、2 つの計測手法の差が占める割合である。

両手法の計測精度と整合性を担保するため、事前に溶媒である水を用いて各レイノルズ数における計測を行い、Dean の実験式に基づく補正係数を算出することで基準の厳密な統一を図った。ただし$C_f = \tau_w / \frac{1}{2}\rho {U_b}^2$で定義される。

$$C_f = 0.073Re^{-0.25} \tag{4}$$

異なる高分子濃度およびレイノルズ数条件下で計測を実施し、両手法から得られた壁面せん断応力の相対的な差分を評価した。両者の比較から、高分子濃度が増加するにつれて、圧力損失から得られた壁面せん断応力に対して、電気化学的計測から得られた壁面せん断応力が相対的に小さくなる傾向が明確に確認された。この計測手法の違いに起因する壁面せん断応力の乖離は、高分子濃度の上昇に伴って拡大した。さらに、この濃度依存性の傾向は、検証した全てのレイノルズ数条件において一貫して認められた。圧力損失測定が流路全体の力学的な釣り合いから壁面での総せん断応力を算出するのに対し、電気化学的計測手法は壁面近傍の物質移動量、すなわち壁面での速度勾配に基づく粘性応力を評価していると考えられる。したがって、本実験における高分子濃度の増加に伴う計測値の差の拡大は、単なる機器の計測誤差ではなく、壁面上に明確に存在する高分子応力項の寄与分を定量的に抽出できている可能性を示唆するものであると推測される。

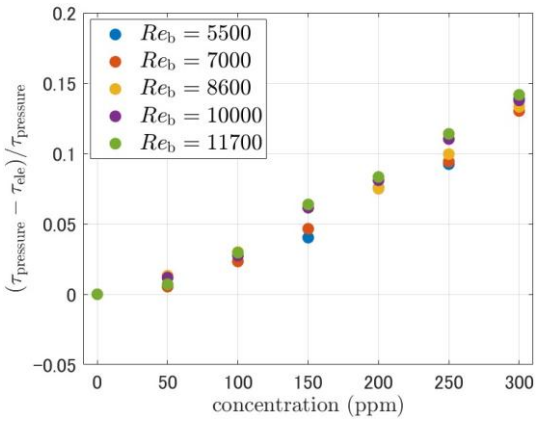


Fig. 3 $\tau_{w,p}$に対し両手法の結果の差が占める割合

参考文献

1) 堀内 潔:粘弾性法線応力差による乱流抵抗低減機構の解明, 日本機械学会論文集 B 編, 70 巻, 699 号, pp.404–410, 2004.
2) J. A. Campbell and T. J. Hanratty: Measurement of wall shear stress, *Fluid Mechanics Measurements*, 2nd ed., Routledge, 1996.
3) Y. Wang and Y. Tsuji: Characteristics of shear stress fluctuations in polymer solutions and their relation to turbulent structures in channel flows, *Physics of Fluids*, 36, 105153, 2024.
4) L. P. Reiss and T. J. Hanratty: An experimental study of the unsteady nature of the viscous sublayer, *AIChE Journal*, 9, pp.154–160, 1963.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

圧縮性等方乱流におけるショックレットの幾何学的解析
A Study on the Geometry of Shocklets in Compressible Isotropic Turbulence

櫻井　幹記（横国大・環境）　　立石　隼啓（岡大・環境）　　石原　卓（岡大・環境）
Yoshiki SAKURAI, Yokohama National University
Hayahiro TATEISHI, Okayama University
Takashi ISHIHARA, Okayama University
E-mail: sakurai-yoshiki-hx@ynu.ac.jp

We investigated the geometry of strong shocklets using high-resolution direct numerical simulations of non-isothermal and isothermal compressible isotropic turbulence. The results revealed that strong shocklets exhibit shapes ranging from thin layers to thin rod-shaped structures and show no significant dependence on the isothermal assumption or the Reynolds number. An analysis based on the moment of inertia, assuming the local structure of the shocklet to be a rectangular parallelepiped, indicated that strong shocklet regions become thicker as the Reynolds number increases.

１．諸言

亜音速領域における圧縮性乱流では，局所的に速度発散が大きく負の値をとるショックレットと呼ばれる弱い衝撃波が形成される．ショックレットは，エネルギー散逸や渦生成など，圧縮性乱流の様々な力学特性に影響を及ぼす重要な乱流構造であると考えられている[1]．

Samtaney et al.[2]は圧縮性減衰乱流の直接数値計算（DNS）を実施し，乱流場から抽出したショックレット構造の多くが湾曲した薄いリボン状であることを示した．Watanabe et al.[3]はソレノイダル外力によって駆動される一様等方性圧縮性乱流の DNS データを解析し，圧力ジャンプおよび圧力勾配から見積もられるショックレット厚みが乱流マッハ数の増加とともに減少し，漸近的にコルモゴロフ長の約 1.5 倍に近づくことを示した．また，彼ら[3]の結果は，ショックレット厚みがレイノルズ数にほとんど依存しないことを示唆している．しかしながら，ショックレットは非常に薄いため，その幾何学的構造を正確に解析するには高い空間解像度を有する DNS データが不可欠である．

近年実施された圧縮性乱流の高解像度 DNS[4]では，速度発散の確率密度関数が非等温乱流と等温乱流で異なり，さらにレイノルズ数に依存することが示された．この結果は，ショックレット構造が等温仮定やレイノルズ数によって変化することを示唆している．本講演では，Vela-Martin and Ishihara[5]によって開発された乱流構造の解析手法を高解像度 DNS で得られた圧縮性乱流場[4]に適用し，ショックレットの幾何学的構造を定量的に特徴づけた結果について報告する．

２．数値計算手法と計算条件

本研究では，3 次元の非等温および等温圧縮性ナビエ・ストークス方程式に基づく高解像度 DNS によって得られた乱流場[4]を解析し，等温仮定の有無およびレイノルズ数がショックレットの幾何学的構造に及ぼす影響を調べた．計算領域は一辺2πの立方体であり，各方向に周期境界条件が課されている．計算手法の詳細については，Sakurai and Ishihara[4]を参照されたい．解析した乱流場の統計量を表 1 に示す．ここで，nonIT と IT はそれぞれ非等温乱流と等温乱流を表し，Nは 1 次元あたりの格子点数，R_λはテイラー・レイノルズ数，M_tは乱流マッハ数，ε_rはエネルギー散逸率の圧縮成分ε_dとソレノイダル成分ε_sの比$\varepsilon_d/\varepsilon_s$，$\eta$はコルモゴロフ長である．すべての計算において，$k_{\max} \equiv \sqrt{2}N/3$により定義される空間解像度は$k_{\max}\eta \approx 8$である．

Table 1 Simulation parameters and turbulence characteristics.

Run	N	R_λ	M_t	ε_r	$10^3\eta$
2048-nonIT	2048	166	0.30	0.098	7.92
2048-IT	2048	182	0.32	0.099	7.90
4096-IT	4096	336	0.33	0.126	4.13

３．解析手法

Vela-Martin and Ishihara[5]によって提案された手法を用いたショックレット構造解析の概要を以下に示す．速度発散$\theta \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{u}$に対して，$\theta < -\alpha\theta_{\mathrm{rms}}\ (\alpha = 20, 30)$を満たす格子点を強いショックレット領域と定義する．ここで，$\boldsymbol{u}$は速度ベクトル，θ_{rms}はθの二乗平均平方根である．強いショックレット領域に含まれる格子点から構成される慣性モーメントテンソルの固有値を解析することにより，三つの主慣性モーメント$I_1, I_2, I_3\ (I_1 > I_2 > I_3 \geq 0)$が得られる．これらより，ショックレットの形状を特徴づける無次元パラメータ

$$\varepsilon_1 = \frac{I_2}{I_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{I_3}{I_1} \tag{1}$$

を定義する．ここで，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$は厚みが無視できる層状構造を，$\varepsilon_1 = 1$かつ$\varepsilon_2 = 0$は厚みが無視できる棒状構造を表す．なお，強いショックレット領域の概形を抽出することを目的とした解析では，フィルター幅$\Delta = (\pi/2)\eta$のガウスフィルターによって粗視化された乱流場を用い，強いショックレット領域の断片の厚さを求めることを目的とした解析では，粗視化なしの元の乱流場を用いた．

本研究では，ショックレット厚みの定量的評価を行うため，以下の解析を実施した．$(100\eta)^3$の立方領域に含まれるショックレットを，一辺の長さがそれぞれ$a, b, c\ (a > b > c)$である直方体として近似する．直方体の重心を原点とし，bとcを辺とする面に垂直な方向をx軸，cとaを辺とする面に垂直な方向をy軸，aとbを辺とする面に垂直な方向をz軸と定義する．このとき，ショックレット領域に含まれる格子点数をMとすると，各軸まわりの慣性モーメントは$I_x = M(b^2 + c^2)/12, I_y = M(c^2 + a^2)/12, I_z = M(a^2 + b^2)/12$と表される．これらの関係式から，最も短い辺の長さは

$$c = \sqrt{\frac{6(I_x + I_y - I_z)}{M}} \equiv \delta \tag{2}$$

のように求めることができる．本研究では，式(2)によって求められる値を強いショックレット領域の厚さδとして定義する．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

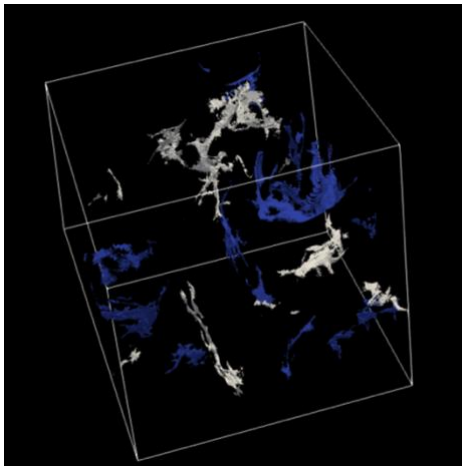


Fig. 1 Visualization of the ten largest shocklets in 2048-nonIT (blue) and 2048-IT (white). The visualization range is $(2\pi)^3$.

4．結果

2048-nonIT および 2048-IT の乱流場において，$\alpha = 20$において大きさが上位 10 位に含まれる強いショックレット領域を重ねて可視化した結果を図 1 に示す．いずれの乱流場においても，ショックレットは乱流場全域に広く分布していることが観察される．詳細な解析の結果，2048-nonIT の乱流場では 2048-IT の乱流場と比較して，ショックレットの個数が多く，かつ，その大きさも大きいことが明らかになった（図省略）。これらの結果は，同程度のレイノルズ数においても，等温仮定の有無によってショックレットの幾何学的性質が変化することを示している．

粗視化した圧縮性乱流場において，$\alpha = 20$により抽出される強いショックレット構造を対象に，等温仮定およびレイノルズ数がε_1およびε_2の値に及ぼす影響を調べた結果を図 2 に示す．図 2 から，ショックレットは薄い層状構造から細い棒状構造に広く分布する形状を有するものの，Vela-Martin and Ishihara [5]が示した渦クラスターのような三次元的に広がった構造をもたないことがわかる。また，図 2(a)では 2048-nonIT と 2048-IT の分布が概ね一致しており，図 2(b)では 2048-IT と 4096-IT の分布が概ね一致していることが観察される．以上のことから，ショックレットの幾何学的形状は等温仮定およびレイノルズ数に対して顕著な依存性を示さないことが示唆された．

$\alpha = 30$において大きさが上位 40 位に含まれる強いショックレットを抽出し，相互に重なって解析が困難なものを除外した結果，2048-IT では 19 個，4096-IT では 30 個のショックレットが抽出された。式(2)を用いてショックレット厚みを算出したところ，その平均値は 2048-IT で$\delta = 2.02\eta$，4096-IT で$\delta = 3.00\eta$となった．以上により，強いショックレット領域の厚さは，レイノルズ数の増加に伴って増加することが示された．

5．結言

圧縮性等方乱流の高解像度 DNS によって得られた乱流場に存在する強いショックレットを対象に幾何学的解析を行い，等温仮定およびレイノルズ数の影響を調べた．その結果，強いショックレットは乱流場全域に広く分布しており，その個数および大きさは等温仮定の影響を受けることが明らかになった．一方で，強いショックレットは薄い層状構造から細い棒状構造に広く分布する形状を有するものの，その形状および分布は等温仮定およびレイノルズ数に対して顕著な依存性を示さないことが示唆された．さらに，直方体近似に基づく慣性モーメントを用いた解析により，レイノルズ数の増加に伴って強いショックレット領域の厚さが増加することが示された．

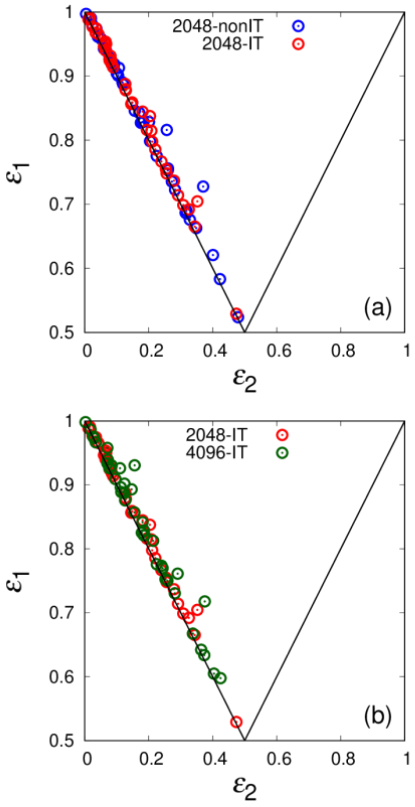


Fig. 2　Effect of (a) the isothermal assumption and (b) the Reynolds number on the values of ε_1 and ε_2.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP23H04473, JP23K19958 の助成を受けて実施した．また，本研究の一部は，HPCI システム利用研究課題（hp240165，hp250088）を通じて，理化学研究所が提供する富岳および名古屋大学が提供する不老の計算資源を使用して実施した．また，学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点（JHPCN）による支援も受けた（課題番号：jh240062，jh250074）．

参考文献

1) P. Sagaut and C. Cambon: Homogeneous Turbulence Dynamics, 2nd edn., Springer, 2018.
2) R. Samtaney, D. I. Pullin, and B. Kosovic: Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics, Phys. Fluids 13, 1415, 2001.
3) T. Watanabe, K. Tanaka, and K. Nagata: Solenoidal linear forcing for compressible, statistically steady, homogeneous isotropic turbulence with reduced turbulent Mach number oscillation, Phys. Fluids 33, 095108, 2021.
4) Y. Sakurai and T. Ishihara: Direct numerical simulations of compressible turbulence in a periodic box: Effect of isothermal assumptions on turbulence statistics, Phys. Fluids 36, 085152, 2024.
5) A. Vela-Martin and T. Ishihara: A new statistical tool to study the geometry of intense vorticity clusters in turbulence. J. Phys.: Conf. Series 708, 012004, 2016.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

非対称流路ネットワークでバクテリア集団運動のトポロジカルエッジ状態をデザインする
Designing Topological Edge States of Bacterial Collective Motion in Asymmetric Channel Networks

内田　善人（東大・理）　　西口　大貴（東京科学大・理）　　竹内　一将（東大・理）
Yoshihito UCHIDA, The University of Tokyo
Daiki NISHIGUCHI, Institute of Science Tokyo
Kazumasa A. TAKEUCHI, The University of Tokyo
E-mail: uchida@noneq.phys.s.u-tokyo.ac.jp

While active matter is intrinsically nonequilibrium and fluctuating, the emergence of topologically protected edge states has been theoretically proposed using the concept of wavenumber topology. However, experimental realizations remain largely unexplored and have so far been limited to systems composed of chiral active particles, which restricts design capabilities. Here, we experimentally realize geometry-driven topological edge states in dense bacterial suspension using microfabricated networks. In a directional kagome network composed of ratchet-shaped channels, we observe edge localization of bacterial density, where the density decays from the network boundary toward the bulk. We further reveal the topological origin of the observed edge states and identify the key geometrical ingredients required for their design.

波数空間トポロジーは固体物理においてロバストな輸送現象を理解するための有用な枠組みであり、近年では、エネルギーを自ら駆動力へと変換する粒子から構成されるアクティブマターへの拡張も研究されている。アクティブマター系は本質的に非平衡でゆらいでいるにもかかわらず、トポロジカルエッジ状態が発現しうることが理論的に予言されている。しかし、実験的には運動のカイラリティーという構成粒子の特徴を活かした実現に留まっており、アクティブマターにおけるトポロジカル輸送現象のデザイン可能性は依然として限定的である。

そこで、運動のカイラリティーといった粒子自身の性質ではなく、粒子の存在する環境の幾何構造によってトポロジカル輸送現象を実現できるという理論提案[1)]に着目した。この枠組みでは、固体物理における結晶構造に類似した周期的な構造を環境として与えることで、アクティブ粒子自身の内部自由度に依存せずにトポロジカル輸送現象を実現できると期待され、その制御可能性に系統的に踏み込める。本研究では、理論モデル[2)]の幾何構造に着想を得て、特徴的な波数空間トポロジーを持つと期待されるネットワーク構造を微細加工で作製し、そこにバクテリア懸濁液を閉じ込めることで、トポロジカルエッジ状態を実現した[3)]。

まず、理論モデル[2)]に着想を得て作製した非対称籠目ネットワークにおいて、バクテリア数密度がエッジからバルクへ向かって減衰するエッジ局在の観察に成功した(Fig. 1 上)。この非対称籠目ネットワークは、バクテリア集団の整流効果を生み出すラチェット型流路（Fig. 1 下）で構成されており、非対称流路によって生じる強い一方向流れがエッジ局在を生み出していることが示唆された。

また、実験的に観察されたエッジ状態のトポロジカルな起源を明らかにするために、非対称流路ネットワーク内でのバクテリア輸送をモデル化し、バンド理論に基づく解析を行った。その結果、ギャップを有するバンド構造が得られ、非自明なトポロジカル不変量によって特徴づけられることが明らかになった。また、バンドギャップを横切るモードが現れ、その固有モードがネットワークのエッジに局在する状態に対応していることを示した。

さらに、エッジ状態の発現に重要な幾何構造の性質を明らかにすべく、微細加工による形状のチューニングを行い、エッジ局在の発現の有無を調査した。その結果、ネットワ

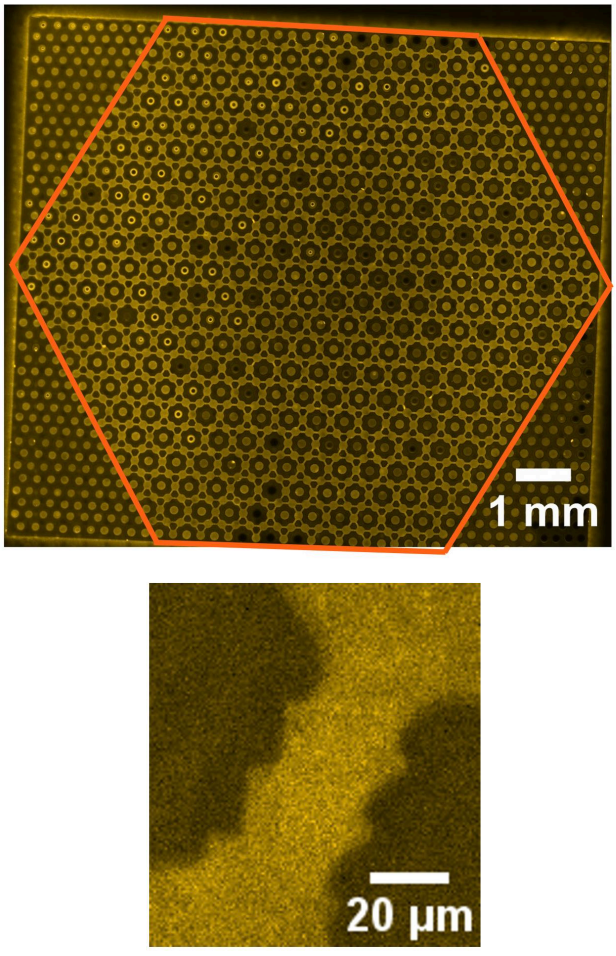


Fig. 1 Epifluorescence microscopy image of dyed bacterial suspension confined in a directional kagome network (top), which is composed of wells connected by ratchet-shaped channels (right).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

ーク構造のカイラリティーにより、エッジ局在の有無を設計できることを実証した。

以上の結果より、典型的なアクティブマター系において、トポロジカル輸送現象を環境の幾何構造によって制御できることを実証した。より一般的な観点からは、幾何形状による輸送現象の制御を通じて、マイクロ流体デバイスなどにおいて、通常は乱流的な振る舞いを示す流れをロバストに制御するための設計指針につながる可能性が期待される。

参考文献

1) K. Sone and Y. Ashida. Anomalous topological active matter. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 205502 (2019).
2) T. Yoshida, T. Mizoguchi, and Y. Hatsugai. Chiral edge modes in evolutionary game theory: A Kagome network of rock-paper-scissors cycles. *Phys. Rev. E.* **104**, 025003 (2021).
3) Y. Uchida, D. Nishiguchi, and K. A. Takeuchi. Designing topological edge states in bacterial active matter. arXiv:2601.08243 (2026).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Nonlinear Scale-Local Deformations of Vortex Rings in Smooth Euler Flows

Tsuyoshi YONEDA, Hitotsubashi University
E-mail: t.yoneda@r.hit-u.ac.jp

We study the three-dimensional incompressible Euler equations in a regime where a vortex ring experiences radially expanding Lagrangian transport. To uncover the mechanisms behind nonlinear scale-local deformations, we construct a geometric Lagrangian framework that avoids singular pressure representations and yields a new wave equation for the axis of swirling particles. This formulation reveals purely nonlinear mechanisms driving scale-local vortex deformations, supported by machine-learning-based analysis.

1. Introduction

In this talk we aim to demonstrate the emergence of short-wavelength structures through a fully nonlinear analysis of the incompressible Euler equations, without resorting to linearization, combined with a machine-learning-based approach.

2. Derivation of a Novel Wave Equation

Let Φ denote the Lagrangian flow map associated with the incompressible Euler equations, written in Lagrangian form (omitting the explicit volume-preserving constraint) as follows:

$$\left(\partial_t^2 \Phi(t,\cdot)\right) \circ \Phi^{-1}(t,x) = -\nabla p(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Let $\ell = \bigcup_s \ell(s) \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth curve representing the vortex axis. We now describe the time evolution of swirling particles around ℓ. Let z denote the arc-length parameter along the transported curve $\bigcup_t \Phi(t,\ell(s))$. More precisely, we define a reparametrization $t = t(z)$ (implicitly depending on s) by

$$\partial_z t = v(t)^{-1} \qquad v(t) := \left|\partial_t \Phi(t,\ell(s))\right|, \quad (2)$$

so that

$$\left|\partial_z \Phi(t(z),\ell(s))\right| = 1.$$

Note that this implies $\partial_z = v(t)^{-1}\partial_t$. Using the transported curve $\bigcup_t \Phi(t,\ell(s))$, we introduce a Lagrangian moving frame. First, we define the unit tangent vector

$$\tau(z) := \partial_z \Phi(t(z),\ell(s)).$$

The curvature $\kappa(z)$ and unit normal vector $n(z)$ are defined by

$$\partial_z \tau(z) = \kappa(z)\, n(z).$$

The torsion $T(z)$ and binormal vector $b(z)$ are then defined through the Frenet–Serret relation:

$$\partial_z n(z) = -\kappa(z)\,\tau(z) + T(z)\, b(z).$$

For any initial particle

$$x = \ell(s) + Z(0,r_1,r_2)\,\tau(0) + r_1\, n(0) + r_2\, b(0),$$

the flow map $\Phi(t,x)$ can be uniquely expressed (for sufficiently small r_1, r_2) as

$$\begin{aligned}\Phi(t,x) &=: \Phi(t,s,r_1,r_2)\\ &= \Phi(t,\ell(s)) + Z(t,r_1,r_2)\,\tau(t)\\ &\quad + R_1(t,r_1,r_2)\, n(t) + R_2(t,r_1,r_2)\, b(t).\end{aligned} \quad (3)$$

Here

$$Z(0,r_1,r_2) = \alpha_1(0) r_1 + \alpha_2(0) r_2, \qquad Z(t,0,0) = 0,$$

and

$$R_1(0,r_1,r_2) = r_1, \qquad R_2(0,r_1,r_2) = r_2,$$

with $\alpha_1(0), \alpha_2(0) \in \mathbb{R}$. Since the Jacobian

$$\frac{\partial(R_1,R_2)}{\partial(r_1,r_2)}$$

is nonzero at $(r_1,r_2) = (0,0)$, the inverse function theorem implies that, for each fixed $t>0$ and for sufficiently small $|R_1|, |R_2|$, we may rewrite (3) in terms of (R_1,R_2) as follows. Let $r_1 = r_1(t,R_1,R_2)$ and $r_2 = r_2(t,R_1,R_2)$ denote the corresponding inverse functions. Then, for any initial particle

$$x = \ell(s) + r_1(t,R_1,R_2)\, n(0) + r_2(t,R_1,R_2)\, b(0),$$

we have

$$\begin{aligned}\Phi(t,x) &=: \Phi(t,s,R_1,R_2)\\ &= \Phi(t,\ell(s)) + Z\big(t,r_1(t,R_1,R_2),r_2(t,R_1,R_2)\big)\,\tau(t)\\ &\quad + R_1\, n(t) + R_2\, b(t).\end{aligned} \quad (4)$$

Note that $\Phi(t,s,R_1,R_2)\big|_{R_1=R_2=0}$ represents the Lagrangian transport of the vortex axis ℓ. We now simplify the function Z by the expansion

$$Z\big(t,r_1(t,R_1,R_2),r_2(t,R_1,R_2)\big) = \alpha_1(t)R_1 + \alpha_2(t)R_2 + O(|R|^2), \quad (5)$$

and we interpret Z as describing the time evolution of swirling particles around the vortex axis. We are now in a position to state the following key theorem.

Theorem. The quantities α_1 and α_2 satisfy the following second–order wave equations:

$$\alpha_1''(t) = \frac{v''(t)}{v(t)}\,\alpha_1(t) + 2v(t)\kappa'(t) + 4v'(t)\kappa(t),$$

$$\alpha_2''(t) = \frac{v''(t)}{v(t)}\,\alpha_2(t).$$

Remark. In a separate line of research, Hasimoto's remarkable discovery that the Local Induction Approximation (LIA) reduces to the focusing nonlinear Schrödinger equation revealed a profound connection between filament geometry and dispersive wave dynamics (see 1)). Despite these influential developments, existing theories rely fundamentally on vortex–filament approximations, such as concentrated vorticity, Biot–Savart expansions, LIA truncations, or asymptotic regimes in which the vortex core radius is assumed to be small. Consequently, the emergence of wave phenomena has traditionally been viewed as a feature of singular or nearly singular vortex models. It has therefore remained unclear whether similar wave dynamics arise intrinsically within the full incompressible Euler equations in a smooth, non–filament setting.

To the best of our knowledge, this paper is the first derivation showing that wave equations governing Lagrangian motion emerge directly from the incompressible Euler equations in a fully smooth setting.

3. Numerical Implementation

In this section, we present a numerical implementation to investigate how the alignment between the vortex axis and the axis of swirling particles is maintained during the time evolution of a vortex ring. In particular, we demonstrate that such alignment cannot

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

be preserved by pure radial expansion alone, and that a nontrivial deformation of the ring plays an essential role. We first prescribe an accelerating transport flow that expands in the radial direction, characterized by a scalar function $\Gamma(t)$ satisfying

$$\Gamma(t_0) = 0, \qquad \Gamma(t) > 0, \qquad \Gamma'(t) > 0, \qquad \Gamma''(t) > 0$$

for $t \in (t_0, t_1)$. The time evolution of the ring shape, for $t \in [t_0, t_1)$ and $s \in [0, 1)$, is defined by

$$\Phi(t,s) = \Big(R(s,\delta) + \Gamma(t) + \gamma_1(t,s)\Big)\begin{pmatrix}\cos 2\pi s\\ \sin 2\pi s\\ 0\end{pmatrix} + \gamma_2(t,s)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Here,

$$R(s,\delta) := \frac{(1+\delta)(1-\delta)}{2\sqrt{\big((1-\delta)\cos s\big)^2 + \big((1+\delta)\sin s\big)^2}}$$

represents the initial ring shape with elliptic radius, where $\delta > 0$ is a small ellipticity parameter. The functions $\gamma_1(t,s)$ and $\gamma_2(t,s)$ describe a time-dependent wavy deformation and are given by

$$\gamma_1(t,s) = \frac{1}{K+1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{K}\Big(c_{jk}^{11}(t-t_0)^{j+1}\sin 2\pi k s + c_{jk}^{12}(t-t_0)^{j+1}\cos 2\pi k s\Big),$$

$$\gamma_2(t,s) = \frac{1}{K+1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{K}\Big(c_{jk}^{21}(t-t_0)^{j+1}\sin 2\pi k s + c_{jk}^{22}(t-t_0)^{j+1}\cos 2\pi k s\Big),$$

where the coefficients $\{c_{jk}^{\ell m}\}_{jk\ell m} \subset \mathbb{R}$ are treated as learnable parameters. We now give a definition of the axis of swirling particles $\zeta(t,s)$ by

$$\zeta(t,s) := \tau(t,s) - \alpha_1(t,s)n(t,s) - \alpha_2(t,s)b(t,s). \tag{6}$$

On the other hand, the vortex axis $\zeta^*(t,s)$ is defined by

$$\zeta^*(t,s) := \partial_s \Phi(t,s,R_1,R_2)\big|_{R_1=R_2=0}.$$

Recall taht α_1 and α_2 satisfy the following wave-type equations:

$$\alpha_1'' = \frac{v''}{v}\alpha_1 + 2v\kappa' + 4v'\kappa, \qquad \alpha_2'' = \frac{v''}{v}\alpha_2,$$

where $v(t,s) := |\partial_t \Phi(t,s)|$ and $\kappa(t,s)$ denotes the curvature of the curve $\cup_t \Phi(t,s)$. For the machine learning implementation, we choose the initial data $\alpha_1(0,s)$, $\alpha_2(0,s)$, $\partial_t\alpha_1(0,s)$, and $\partial_t\alpha_2(0,s)$ so that

$$\frac{\zeta^*(0,s)}{|\zeta^*(0,s)|}\cdot\frac{\zeta(0,s)}{|\zeta(0,s)|} = 1, \quad \partial_t\left(\frac{\zeta^*(t,s)}{|\zeta^*(t,s)|}\cdot\frac{\zeta(t,s)}{|\zeta(t,s)|}\right)\Big|_{t=0} = 0$$

for $s \in [0,1)$. These conditions ensure that the vortex axis and the axis of swirling particles are perfectly aligned at the initial time. If the two axes are not parallel, the resulting rotating flow tends to exhibit shear. From a physical viewpoint, it is therefore natural to assume that the system favors configurations in which these axes remain aligned during the evolution, thereby minimizing shear. Motivated by this consideration, we introduce the following mean absolute directional correlation (MADC) as a functional:

$$\mathrm{MADC} := \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left|\frac{\zeta^*(t,s)}{|\zeta^*(t,s)|}\cdot\frac{\zeta(t,s)}{|\zeta(t,s)|}\right| ds\, dt,$$

which serves as an objective functional to be maximized. In the numerical implementation, we set

$$\Gamma(t) = 1 - \cos(12\pi t), \qquad (t_0 = 1/48,\ t_1 = 1/24),$$

and adopt the following hyperparameters:

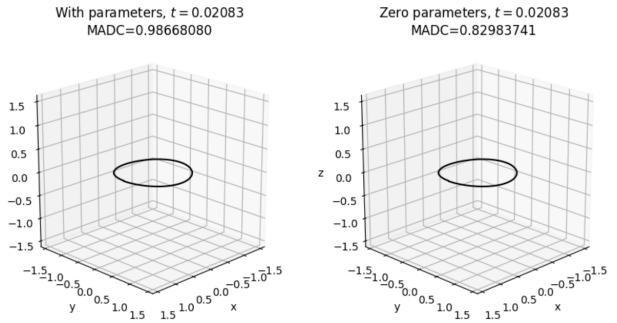


Fig. 1 Initial vortex rings (the same configuration). Left: Bayesian optimization, Right: $\{c_{jk}^{\ell m}\}_{jk\ell m} = 0$

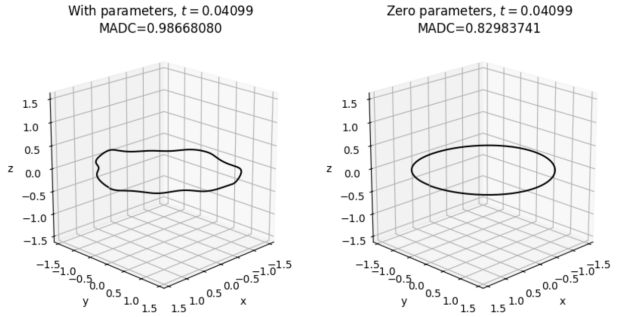


Fig. 2 Vortex rings at the terminal time. Left: Bayesian optimization, Right: $\{c_{jk}^{\ell m}\}_{jk\ell m} = 0$

- $\delta = 0.02$ (ellipticity parameter),
- $J = 20$ (number of polynomial terms),
- $K = 10$ (number of Fourier modes).

The time interval $[t_0, t_1]$ is discretized into 32 steps, and the angular parameter interval $[0, 1)$ is discretized into 128 points. For optimization, we employ Bayesian optimization using the Optuna library:

- First 10,000 trials: quasi–Monte Carlo sampling,
- Subsequent 50 trials: Bayesian optimization,
- Parameter bounds: $|c_{jk}^{\ell m}| \le 30.0$.

The numerical results are shown in Figures 1 and 2. Qualitatively, the results indicate that maintaining alignment between the vortex axis and the axis of swirling particles throughout the evolution requires the presence of a nontrivial wavy deformation. Conversely, larger values of MADC are obtained only when such wavy deformations are included, indicating that these deformations play a fundamental role in generating the discrepancies captured by the error metric. At the present stage, our analysis remains qualitative. Nevertheless, despite prescribing ten Fourier modes in the Bayesian learning procedure, the representations inferred from the image data consistently indicate that the effective dynamics are dominated by five to six Fourier modes. This observation provides strong evidence that the deformation of the vortex ring is governed by scale-local mechanisms. A central direction for future work is to undertake a detailed qualitative investigation of this scale locality.

References

1) H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972) 477-485.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-07：形態と機能の材料力学）

2026年5月16日(土) 9:10 ~ 10:25 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-07 (1)

座長:永島 壮(名古屋大学)

9:10 ~ 9:25

[16001] 加法変分原理と乗法重み構造の自然な等価性

*髙梨 和光[1] (1. NPO法人環境防災コンシェルジェ)

9:25 ~ 9:40

[16002] Föppl–von Kármán 板理論と分子動力学法による回位を導入したグラフェンシートの形態解析

*石田 一真[1]、田中 展[2]、雷 霄雯[1]、藤居 俊之[1] (1. 東京科学大学、2. 兵庫県立大学)

9:40 ~ 9:55

[16003] 転位対に起因するカーボンナノチューブのらせん構造形成機構と力学特性の解析

*小屋根 淳平[1]、雷 霄雯[1]、松崎 健一郎[1]、藤居 俊之[1] (1. 東京科学大学)

9:55 ~ 10:10

[16004] フェーズフィールド・クリスタル法と分子動力学法によるらせん状カーボンナノチューブのモデル構築と力学特性解析

*雷 霄雯[1]、松崎 健一郎[1]、藤居 俊之[1]、高木 知弘[2] (1. 東京科学大学、2. 京都工芸繊維大学)

10:10 ~ 10:25

[16005] 有限変形奇弾性構成則の構築に向けた変形勾配の乗算分解に基づく超弾性モデル

*松原 成志朗[1]、志賀 美春[1]、中村 明莉[1]、寺田 賢二郎[1] (1. 東北大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Natural Equivalence between Additive Variational Principles and Multiplicative Weight Structures

Wako Takanashi,Concierge for environmental space and protection of disasters

This paper is established that a natural equivalence between the category of additive variational principles and the category of multiplicative weight structures with exponential and logarithmic functors. The result offers a unified structural framework underlying variational mechanics clarifying the relationship between action, energy, and exponential weighting.

1. Introduction

The variational principle constitutes a fundamental framework in classical mechanics, field theory, and continuum mechanics. The transition between additive and multiplicative formulations of the variational principle is often treated as a formal operation rather than a structural correspondence. The purpose of this paper is to show that the additive and multiplicative descriptions are naturally equivalent with adjoint pairs, and that this equivalence does not claim that the additive and multiplicative weights are identical, however rather that each uniquely determines the canonical representative in the category of the other, excluding natural isomorphisms.

2. The Category of Additive Variational Principles

2.1. Definition

Definition 2.1 (Additive Variational Category).
Let C_{add} be the category defined as follows:

- **Objects:** Real-valued functionals
$$S: U \to \mathbf{R}, \tag{2.1.1}$$
where U is a configuration space
(e.g., fields, displacements, paths).
- **Morphisms:** Maps $f: U_1 \to U_2$ satisfying
$$S_2 \circ f = S_1 \tag{2.1.2}$$

This category includes classical actions, energy functionals, and strain energies as special cases.

2.2. Variational Structure

Each object $S \in C_{\text{add}}$ admits a variational derivative δS. However, the present work focuses not on critical point equations but on the structural properties of S as an additive object.

3. The Category of Multiplicative Weight Structures

3.1. Definition

Definition 3.1 (Multiplicative Weight Category).
Let C_{mult} be the category defined as follows:

- **Objects:** Positive-valued functions
$$w: U \to \mathbf{R}_{>0}. \tag{3.1.1}$$
- **Morphisms:** Maps $f: U_1 \to U_2$ such that
$$w_2 \circ f = w_1. \tag{3.1.2}$$

3.2. Independence from Probability Theory

No normalization or probabilistic interpretation is imposed on www. The multiplicative structure alone is fundamental; probability theory arises only after additional constraints.

4. Exponential and Logarithmic Functors

4.1. Exponential Functor

Definition 4.1 (Exponential Functor).
Define
$$\text{Exp}: C_{\text{add}} \to C_{\text{mult}} \tag{4.1.1}$$
by
$$\text{Exp}(S) = \exp(-\beta S), \tag{4.1.2}$$
where $\beta > 0$ is a fixed parameter.

4.2. Logarithmic Functor

Definition 4.2 (Logarithmic Functor).
Define
$$\text{Log}: C_{\text{mult}} \to C_{\text{add}} \tag{4.2.1}$$
by
$$\text{Log}(w) = -\beta^{-1} \log w. \tag{4.2.1}$$

4.3. Functoriality

Both constructions act naturally on morphisms and preserve categorical composition, hence define bona fide functors.

5. Main Theorem: Natural Equivalence

Theorem 5.1 (Natural Equivalence).
The functors
$$\text{Exp}: C_{\text{add}} \rightleftarrows C_{\text{mult}}: \text{Log} \tag{5.1.1}$$
form an adjoint pair
$$\text{Exp} \dashv \text{Log}, \tag{5.1.2}$$
and induce a natural equivalence between the two categories.
That is, there exist natural transformations
$$\eta : \text{Id}_{C_{\text{add}}} \Rightarrow \text{Log} \circ \text{Exp}, \tag{5.1.3}$$
$$\varepsilon : \text{Exp} \circ \text{Log} \Rightarrow \text{Id}_{C_{\text{mult}}}, \tag{5.1.4}$$
satisfying the triangular identities.

5.2. Strength of the Equivalence

This equivalence asserts neither equality nor pointwise identity. Rather, it guarantees that:

- Each additive variational principle admits a canonical multiplicative representative.
- Each multiplicative weight determines a canonical additive generator.

Thus, additive and multiplicative formulations are equivalent up to natural isomorphism, not substitution.

6. Physical Examples

6.1. Statistical Mechanics

Given an energy functional E, the canonical weight
$$W \propto \exp(-\beta E) \tag{6.1.1}$$
is precisely the image of E under the exponential functor.

6.2. Linear Elasticity

For a strain energy functional
$$E[u] = \int W(\varepsilon(u))\, dx \tag{6.2.1}$$
the associated exponential weight defines a multiplicative structure compatible with stochastic or ensemble-based elasticity theories.

7. Conclusion

This paper are shown that additive variational principles and multiplicative weight structures are naturally equivalent in a precise categorical sense. This equivalence clarifies the conceptual relationship between action, energy, and exponential weighting across mechanics.

Acknowledgments

In particular, the author wishes to express his heartfelt appreciation for the invaluable guidance and encouragement provided by the late Emeritus Professor Yorihiko Ohsaki of the University of Tokyo.

References

1) Atiyah, M., The Geometry of Classical Particles
2) VJaynes, E. T., Information Theory and Statistical Mechanics
3) Mac Lane, S., Categories for the Working Mathematician
4) Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., Theory of Elasticity

Appendix

Appendix A:
Categorical Structure of the Exponential–Variational Correspondence

This appendix provides a precise categorical formulation underlying the natural equivalence established in the main text.

A.1 The Additive Variational Category V_+

Objects.

Objects of V_+ are pairs

$$(C,S), \tag{A.1.1}$$

where C is a configuration space (e.g. a Banach or Hilbert manifold of fields) and
$S:C\to\mathbf{R}$ is an additive action functional.

Morphisms.

A morphism

$$\phi:(C_1,S_1)\to(C_2,S_2) \tag{A.1.2}$$

is a map $\phi:C_1\to C_2$ such that

$$S_2 \circ \phi = S_1. \tag{A.1.3}$$

This category admits:

- additive combination S_1+S_2,
- constant shifts $S\mapsto S+c$,

reflecting the intrinsic additive nature of variational principles.

A.2 The Multiplicative Weight Category $V_\times$

Objects.

Objects of $V_\times$ are pairs

$$(C,w), \tag{A.2.1}$$

where $w:C\to\mathbf{R}_{>0}$ is a positive multiplicative weight.

Morphisms.

A morphism

$$\phi:(C_1,w_1)\to(C_2,w_2) \tag{A.2.2}$$

satisfies

$$w_2 \circ \phi = w_1 \tag{A.2.3}$$

The natural operations are:

- pointwise multiplication $w_1 \cdot w_2$,
- normalization $w\mapsto c\,w$, $c>0$.

A.3 Exponential and Logarithmic Functors

Define the exponential functor

$$\mathrm{Exp}_\beta: V_+\to V_\times, \qquad (C,S)\mapsto (C,e^{-\beta S}), \tag{A.3.1}$$

and the logarithmic functor

$$\mathrm{Log}_\beta: V_\times\to V_+, \qquad (C,w)\mapsto (C,-\beta^{-1}\log w), \tag{A.3.2}$$

where $\beta>0$ is a fixed scaling parameter.

These are well-defined functors respecting morphisms in each category.

A.4 Adjunction and Natural Equivalence

For any $(C,S)\in V_+$ and $(C,w)\in V_\times$, there exists a natural isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{V_\times}(\mathrm{Exp}_\beta(S),w) \cong \mathrm{Hom}_{V_+}(S,\mathrm{Log}_\beta(w)). \tag{A.4.1}$$

The unit

$$\eta_S: S \longrightarrow \mathrm{Log}_\beta \circ \mathrm{Exp}_\beta(S) \tag{A.4.2}$$

and the counit

$$\varepsilon_w: \mathrm{Exp}_\beta \circ \mathrm{Log}_\beta(w) \longrightarrow w \tag{A.4.3}$$

are identities up to additive and multiplicative gauge transformations, respectively.

Hence, $\mathrm{Exp}_\beta \dashv \mathrm{Log}_\beta$ defines a natural equivalence modulo gauge, not merely a formal correspondence.

Appendix B:Physical Realizations

B.1 Linear Elasticity as an Additive Variational Theory

Let uuu be a displacement field on a domain Ω.

The elastic energy functional

$$E[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(u):C:\varepsilon(u)\,dx \tag{B.1.1}$$

is an additive action functional.

The Euler–Lagrange equation

$$\delta E=0 \iff \nabla\cdot\sigma=0 \tag{B.1.2}$$

expresses mechanical equilibrium and is invariant under additive shifts of E.

B.2 Canonical Weights and Multiplicative Structure

Applying the exponential functor yields the canonical weight

$$p[u]=\exp(-\beta E[u]). \tag{B.2.1}$$

This weight:

- is multiplicative under independent subsystems,
- is invariant under normalization,
- defines a probability density in statistical or stochastic interpretations.

Thus, the passage

$$(u,E) \longrightarrow (u,p) \tag{B.2.2}$$

realizes concretely the functor Exp_β.

Appendix C:
Natural Equivalence between Additive Variational Principles and Multiplicative Weight Structures

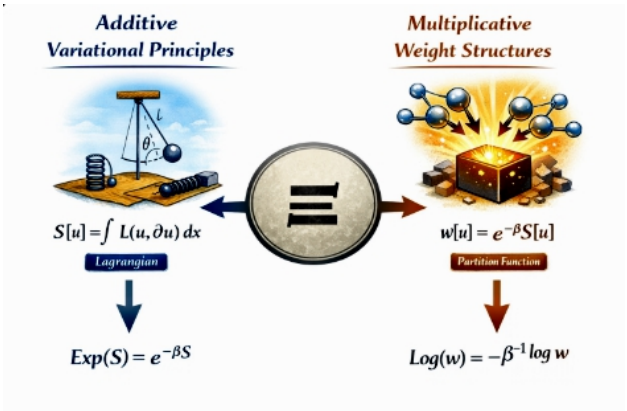


Fig.1 Natural Equivalence between Additive Variational Principles and Multiplicative Weight Structures

Föppl–von Kármán 板理論と分子動力学法による回位を導入したグラフェンシートの形態解析

Morphological Analysis of Graphene Sheets with Disclinations using Föppl–von Kármán Plate Theory and Molecular Dynamics Method

石田　一真（東京科学大・物質理工）　田中　展（兵庫県立大・工）
雷　霄雯（東京科学大・物質理工）　藤居　俊之（東京科学大・物質理工）
Kazuma ISHIDA, Institute of Science Tokyo
Hiro TANAKA, University of Hyogo
Xiao-Wen LEI, Institute of Science Tokyo
Toshiyuki FUJII, Institute of Science Tokyo
E-mail: lei.x.ac@m.titech.ac.jp

In this study, we developed a continuum model of graphene sheets (GSs) with lattice defects based on the Föppl–von Kármán plate theory. Low-dimensional nanocarbon materials such as GSs exhibit significant changes in their mechanical properties due to lattice defects including disclinations and dislocations, which induce spontaneous out-of-plane deformations. GSs form conical or saddle-like shapes when positive (5-membered) or negative (7-membered) disclinations are introduced. While molecular dynamics simulations are widely used to investigate these materials, they are limited to nanoscale systems and constructing molecular models with arbitrary defect configurations remains challenging. By combining the Föppl–von Kármán plate theory with a formulation of lattice defects, large out-of-plane deformations caused by arbitrary defect configurations can be reproduced. Isogeometric linear buckling analysis was done to obtain the deformation shape of GSs with lattice defects. The validity of the approach was confirmed by comparison with MD simulation results.

１．はじめに

グラフェンシート（GS: Graphene Sheet）やカーボンナノチューブといった低次元ナノ炭素材料は，転位や回位などの格子欠陥の導入に伴う自発的な面外変形により，力学特性が大きく変化することが知られている[1),2)]．GS は炭素原子の 6 員環からなる平面構造を基本とするが，正の回位（5 員環）や負の回位（7 員環）の導入により，円錐型や鞍型の立体形状を形成する．このような格子欠陥を有する GS は，耐衝撃性[2)]などの優れた機能性を示すため，NEMS（Nanoelectromechanical Systems）等への応用が期待されている．

格子欠陥を有する GS の優れた機能性発現の探索には，分子動力学（MD: Molecular Dynamics）法が広く用いられている．MD 法は，原子間の相互作用を記述する原子間ポテンシャルに基づき系の時間発展を計算するため，格子欠陥を含む GS の立体形状を高精度に再現できる．しかしながら，MD 法は膨大な計算コストを要するため，解析規模が時間的・空間的にナノスケールに限定されるという課題がある．さらに，一般的には，格子欠陥の種類，位置を自在に制御した分子モデルの構築は困難であるため，機能性材料設計に向けた，高効率な解析手法が求められている．

このような課題を克服するために，連続体力学の適用が考えられる．特に回位論においては，転位配列と回位双極子の力学的な等価性が，線形弾性論と MD 法を用いて検証されている[2)]．両者の力学的等価性は確認されているものの，従来の線形弾性論では格子欠陥に起因する面外変形を記述できないため，長距離の回位双極子と転位配列の比較において，MD 法の結果と乖離することが指摘されている．したがって，回位論に基づく高精度な解析には，面外変形を適切に考慮可能な連続体理論の枠組みを用いることが不可欠である．

以上の背景を踏まえ，本研究では，連続体力学に基づく高効率な機能性材料設計基盤の構築を目的とし，薄板の有限変形理論である Föppl–von Kármán（FvK）板理論に回位を組み込んだ格子欠陥を有する GS モデルを構築した．本モデルは，格子欠陥分布を任意に設定し，回位に起因する面外への大変形を再現することが可能である．アイソジオメトリック解析（IGA: Isogeometric Analysis）を用いた線形座屈解析を行い，回位を有する GS の立体形状を計算した．さらに，本モデルの妥当性を検証するため，同等の回位配置を有する GS モデルに対し，MD 法を用いて緩和計算を実施し，得られた形状を提案手法と比較した．その結果，FvK 板理論に基づく本手法により，正の回位を有する GS は円錐型に，負の回位を有する GS は鞍型に変形する形態を適切に評価できることが明らかとなった．さらに，複数の回位を導入した GS の形態解析を行った．

２．解析手法

２．１．Föppl–von Kármán 板理論

FvK 板理論に基づく回位を有する GS の支配方程式およびエネルギー汎関数は，通常のひずみエネルギーに加え，未定乗数法を用いることで，回位による不適合条件式を組み込んで，次式で表される[4)]．

$$\begin{cases} D\Delta^2 w = [w, \Phi] \\ \dfrac{1}{2Eh}\Delta^2\Phi + \dfrac{1}{2}[w,w] = \Theta \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Pi(\Phi, w) = &\frac{D}{2}\int_\omega ((\Delta w)^2 - (1-\nu)[w,w])dA \\ &-\frac{1}{2Eh}\int_\omega ((\Delta\Phi)^2 - (1+\nu)[\Phi,\Phi])dA \\ &+\frac{1}{2}\int_\omega (\nabla w)^T \mathrm{cof}(\nabla^2\Phi)(\nabla w)dA \\ &+\int_\omega \Theta\Phi dA \end{aligned} \tag{2}$$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

ここで Φ は面内応力関数, w は面外変位, D は曲げ剛性, E はヤング率, h は板厚, ν はポアソン比, Θ は回位密度, N は回位の個数, s_i は回位のフランクベクトルの大きさ, r_i は回位芯の位置, $\mathrm{cof}(A)$ は A の余因子行列である. 回位密度および演算子 $[\cdot,\cdot]$ は次式で表される.

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N} s_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{3}$$

$$[f, g] = (\partial_{xx} f)(\partial_{yy} g) + (\partial_{yy} f)(\partial_{xx} g) - 2(\partial_{xy} f)(\partial_{xy} g) \tag{4}$$

式(2)のエネルギー汎関数は変位の 2 階微分を含むため, 解析における基底関数にはC^1級の連続性が要求される. そこで本研究では, 高次の連続性を容易に扱える IGA により解析をおこなった. 長方形の解析領域について, 基底関数として次数 4, 開一様ノットベクトルの B スプライン曲面を用いた. 回位は外力とみなし, 式(2)に導入した. 回位の存在により, GS に大変形が生じるため, 線形座屈解析を行い, 最小固有値に対応する座屈モードを採用した. 材料定数には, GS の物性値を用いた [5].

2．2．分子動力学法

回位を有する GS の分子モデルを構築した. MD 法では, 原子間相互作用に AIREBO ポテンシャルを用い, 共役勾配法により, 系の相対エネルギー変化が 10^{-25} 以下になるまで, 構造最適化を行った. MD 法は系のすべての原子を計算するため, FvK 板理論よりも高精度に格子欠陥を有する GS の最安定な立体形状を得られるため, FvK 板理論によるグラフェンシートの面外変位場の妥当性を検証するためのベンチマーキングとして用いる.

本研究では, 正および負の孤立回位, 正と負の回位のペアである回位双極子を一列に並べた回位双極子配列, 回位を互い違いに四角形型に配置した回位四重極子のモデルに対し, FvK 板理論および MD 法による解析を行った. 境界条件はいずれも自由境界とした. 解析モデルの大きさ, および回位の位置は Fig. 1 に示した.

3．結果・考察

FvK 板理論に基づく線形座屈解析, および MD 法による解析結果を Fig. 1 に示す. なお, 線形座屈解析では座屈モードのみが得られ, 面外変位の定量的な評価はできないため, 本稿では形状の定性的な比較にとどめる.

各モデルについて, FvK 板理論により得られた面外変位場は, MD 法による構造最適化後の形状と良好な対応を示した. 特に, 正および負の孤立回位においては, それぞれ特徴的な円錐型, 鞍型の曲面が再現されている. また, 回位四重極子の場合も MD 法と近い形態を示した. この結果から, FvK 板理論は格子欠陥を有する GS の形態解析への適用が可能であると考えられる. 一方, 回位双極子配列モデルにおいては, MD 法の結果との間に形状の乖離がみられた. これは, 他モデルと異なり, 両端の回位に挟まれた中心部の回位双極子付近で面内応力場の絶対値が大きくなり, GS の中心部が局所的に大きく変形したためである.

今後は, 線形座屈解析における回位の重ね合わせが面内応力場に与える影響の理論的な考察や, 非線形座屈後解析による面内応力場の変化について, 詳細な解析を進める必要がある.

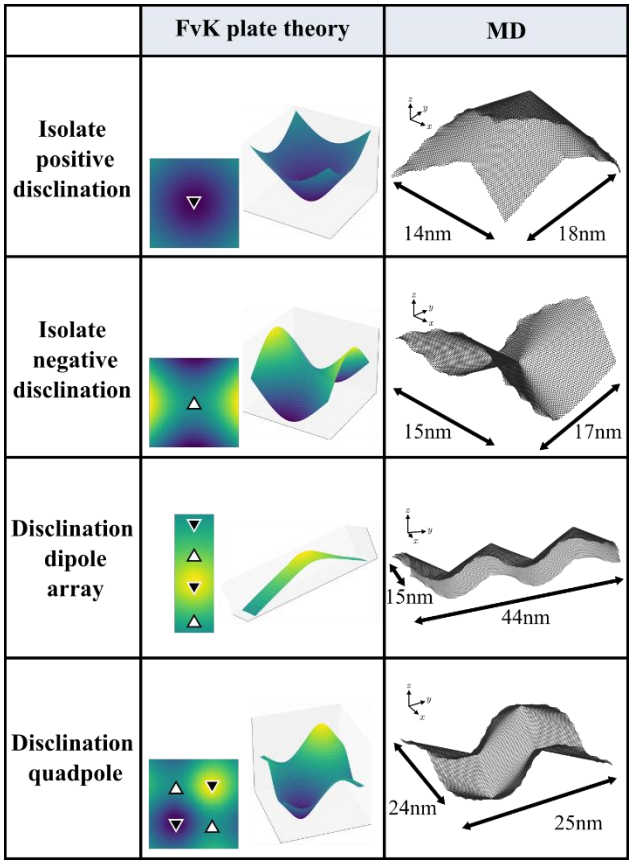


Fig. 1 Comparison of out-of-plane deformation shapes obtained by FvK plate theory and MD simulation. Black and white triangles represent positive and negative disclinations.

4．結言

本研究では, 回位を有する GS の面外変形について, FvK 板理論を用いた線形座屈解析を行った. 得られた形状は, MD 法による安定形状と定性的な一致を示し, 連続体モデルの有効性が明らかになった.

今後は, 非線形の座屈後解析を行い, 変形の定量的な評価や力学特性解析を進め, 高効率な材料設計基盤の構築を目指す.

参考文献

1) H. Qin, Y. Sun, J. Z. Liu and Y. Liu: Mechanical properties of wrinkled graphene generated by topological defects, Carbon, 108, pp.204-214, 2016.
2) Y. Tomioka, T. Natsuki, J.-X. Shi and X.-W. Lei: Theoretical evaluation of impact characteristics of wavy graphene sheets with disclinations formed by origami and kirigami, Nanomaterials, 12(3), pp.436, 2022.
3) S. Tsuchida, X.-W. Lei, Y. Kunihiro and T. Fujii: Numerical analysis of the fungibility of disclination dipole by dislocation array or dislocation monopole, Materials Today. Communications, 41(110687), 2024.
4) M. Singh, A. Roychowdhury and A. Gupta: Defects and metric anomalies in Föppl–von Kármán surfaces, Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, 478(2262), 2022.
5) Y. Kunihiro, X.-W. Lei, T. Uneyama and T. Fujii: A new computational approach for evaluating bending rigidity of graphene sheets incorporating disclinations, Nanoscale, 17(31), pp.18112-18126, 2025.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

転位対に起因するカーボンナノチューブのらせん構造形成機構と力学特性の解析

Analysis of the helical structure formation and mechanical properties of carbon nanotubes due to dislocation pairs

小屋根　淳平（東京科学大・物質理工）　雷　霄雯（東京科学大・物質理工）
松崎　健一郎（東京科学大・物質理工）　藤居　俊之（東京科学大・物質理工）
Jumpei KOYANE, Institute of Science Tokyo
Xiao-Wen LEI, Institute of Science Tokyo
Kenichiro MATSUZAKI, Institute of Science Tokyo
Toshiyuki FUJII, Institute of Science Tokyo
E-mail: lei.x.ac@m.titech.ac.jp

This study explored the feasibility of designing helical CNTs by intentionally inducing out-of-plane deformation through dislocation pairs separated from Stone–Wales (SW) defects, which are common in CNTs. Analytical models were systematically constructed by introducing dislocation pairs into (4,4) CNTs with lengths of about 160 to 480 Å. The centerline of each CNT was approximated as a three-dimensional helix, and geometric parameters such as helix radius were extracted. Additionally, tensile tests were conducted to estimate the spring constants based on elastic energy. The simulation results indicated that the deformation pattern of CNTs is strongly influenced by the arrangement rule of the introduced dislocation pairs, which results in a change in the mechanical properties of the helical CNTs. This study revealed that the introduction of dislocation pairs into CNTs significantly changes the shape and mechanical properties of CNTs and showed the possibility of controlling the properties of helical CNTs by adjusting the type and arrangement of dislocation pairs introduced into the CNTs.

1．緒言

カーボンナノチューブ（Carbon nanotube: CNT）は，軽量でありながら優れた強度，導電性，熱伝導性を有する材料である．CNT は，格子欠陥を導入すると自発的な面外変形が生じて，形状変化する．導入した格子欠陥の種類や配置によっては CN がらせん状に変形することが明らかになっている．らせん状 CNT はその特異な三次元構造から，直線状 CNT 同様の高い力学的強度に加えて，ばねのような弾性を有するため，ナノスプリング等の機械部品としての活用が期待されている [1]．

そこで本研究では，CNT においてしばしば観察される Stone-Wales (SW) 欠陥が分離することによって生成する転位対に着目する．転位対を導入した CNT に分子動力学 (Molecular dynamics: MD)による変形シミュレーションを行い，変形後の形状を評価する．さらに，らせん状 CN モデルの引張変形シミュレーションによってばね定数を算出する．これらの結果から，転位対の種類や密度，配置と，CNT の形状や力学特性との関係を明らかにし，らせん状 CN の特性の制御に貢献する．

2．解析モデル

我々の先行研究 [2]で開発した方法を用いて解析モデルを作成した．全長が 160～480 Å でカイラリティが（4, 4）の無欠陥 CNT に対して，Fig. 1 に示す 3 種類の転位対をそれぞれ異なる配置規則によって各 CNT に規則的に導入した．

Fig. 2 に示すように，導入した転位対間に存在する 6 員環の数を，CNT の長手方向については s，円周方向については t と定義し，これらを用いて転位対の配置規則を一意に記述した．

転位対の導入には，deWit[3]の連続体の転位論を応用し，式 (1)，(2)を用いて転位が原子に与える変位を計算した．

$$u_1^T = b_1\left[\frac{\varphi}{2\pi} + \frac{x_1 x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right] \quad (1)$$

$$u_2^T = -\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho + \frac{x_1^2}{\rho^2}\right] \quad (2)$$

ここで、u は変位，b はバーガースベクトルの大きさ，x は転位を原点，バーガースベクトルをx_1 軸上にとったときの，変位を計算する原子の座標，φ はその原子の座標の偏角，ρ はその原子の原点からの距離，ν はポアソン比である．

作成した解析モデルには LAMMPS を用いて MD 法によるエネルギー最小化計算を行い，エネルギー誤差許容値が 1.0×10^{-17} 以下になるまで構造を最適化した．原子間ポテンシャルは AIREBO ポテンシャルを用いた．AIREBO ポテンシャル中の REBO ポテンシャルのカットオフ距離は 1.95 Å とした．

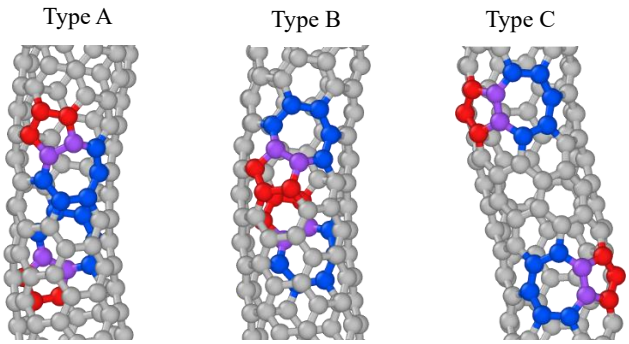


Fig. 1 Three types of dislocation pairs.

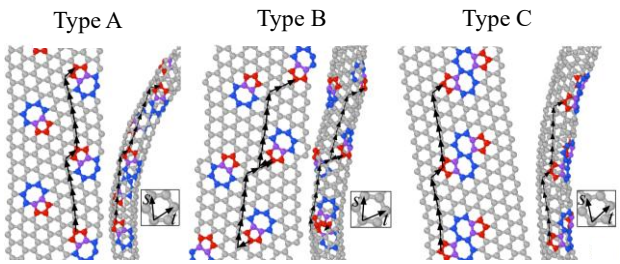


Fig. 2 The arrangement rules of dislocation pairs.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

３．解析方法

MD 法によるエネルギー最小化計算を行い，安定な構造が得られたモデルのみを考察の対象とした．らせん状 CNT の円筒の中心を通る曲線を三次元のらせん構造として近似し，らせん半径，巻数，らせん角等のらせん形状を表す指標を解析した．

安定構造を持つモデルに対し MD 法を用いて引張試験シミュレーションを行った．引張時の温度は 5 K，ひずみ速度は 0.01 /ps とした．得られた結果から変位およびポテンシャルエネルギーを計算した．式 (3) を用いて，ばね定数を導出した．

$$\Delta U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{3}$$

ここで，ΔU は引張前後のポテンシャルエネルギーの差，k はばね定数，x は変位である．

４．結果と考察

らせん状 CNT の巻数は，転位対を導入する前の CNT の長さ（理想長さ）に大きく影響され，Fig. 4 に示すように，導入した転位対の種類と配置が等しい場合は，巻数は理想長さに対し線形に単調増加した．一方，らせん半径は理想長さの影響をほとんど受けず，導入した転位対の種類と配置のみによって決まった．Fig. 5 に示すように，らせん半径は転位対の種類と t によって大きく異なる値を示した．それらが等しいモデル同士の比較では，s の値が大きい，すなわちチューブ長手方向における転位対同士の間隔が広いほどらせん半径は大きくなる傾向を示した．

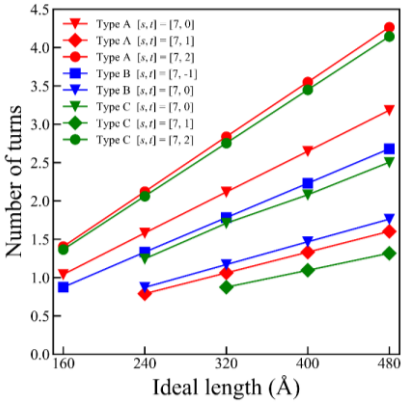


Fig. 4 Relationship between number of turns and ideal length.

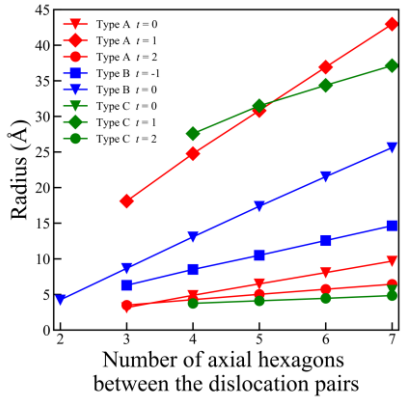


Fig. 5 Relationship between radius and number of axial hexagons between the dislocation pairs.

理想長さが異なるモデル間の比較では，巻数以外の差は小さく，ばね定数は主に巻数に依存し，Fig. 6 に示すように巻数が大きいほどばね定数は小さくなった．理想長さが等しいモデルの比較では，ばね定数は複数の要素に影響されるものの，らせん半径の影響が最も強く，Fig. 7 に示すようにらせん半径が大きいほどばね定数は小さくなった．材料力学の理論により，マクロスケールのコイルばねでは，巻数およびらせん半径の増加に伴ってばね定数は減少する．本研究により，ナノスケールのらせん状 CNT においても，同様の力学的挙動が明らかになった．

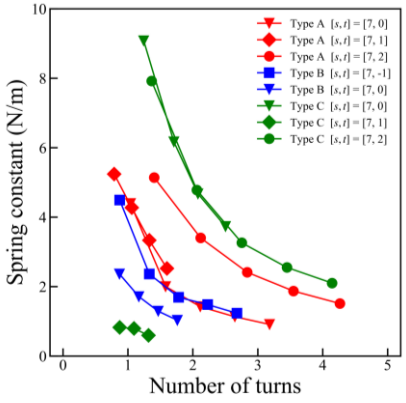


Fig. 6 Relationship between spring constant and number of turns.

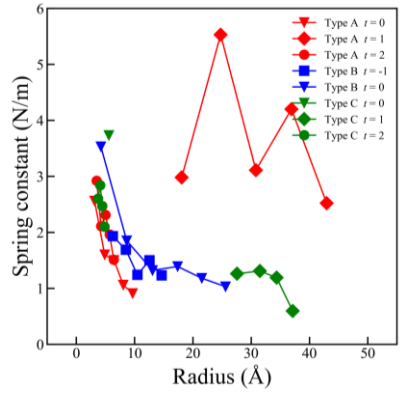


Fig. 7 Relationship between spring constant and radius.

５．結言

本研究は，CNT への転位対の導入によって CNT の形状および力学特性が大きく変化することを明らかにし，CNT 中に導入される転位対の種類や配置を変化させることにより，らせん状 CNT の特性を制御し得る可能性を提示した．

参考文献

1) K. T. Lau, M. Lu, and D. Hui: Coiled carbon nanotubes: Synthesis and their potential applications in advanced composite structures, Composites Part B: Engineering, 37, pp. 437-448, 2006.
2) X.-W. Lei, J. Koyane, T. Lu, K. Matsuzaki, Y. Yan, J.-X. Shi, and T. Fujii: Mechanical and Geom etric Properties of Nanosprings Based on Carbon Nanotubes with Dislocation Dipoles, ACS Applied Nano Materials, 8, pp.9192-9200, 2025.
3) R. deWit: Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations, Journal of research of the National Bureau of Standards. Section A, Physics and Chemistry, 77A, pp. 607-658, 1973.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

フェーズフィールド・クリスタル法と分子動力学法による らせん状カーボンナノチューブのモデル構築と力学特性解析

Model Construction and Mechanical Property Analysis of Coiled Carbon Nanotubes Using Phase Field Crystal Method and Molecular Dynamics Method

雷　霄雯（東京科学大・物質理工）　松崎　健一郎（東京科学大・物質理工）
藤居　俊之（東京科学大・物質理工）　高木　知弘（京都工芸繊維大・機械工学）
Xiao-Wen LEI, Institute of Science Tokyo
Kenichiro MATSUZAKI, Institute of Science Tokyo
Toshiyuki FUJII, Institute of Science Tokyo
Tomohiro TAKAKI, Kyoto Institute of Technology
E-mail: lei.x.ac@m.titech.ac.jp

Carbon nanotubes (CNTs) possess outstanding mechanical and electrical properties, and their helical configurations have attracted considerable attention for applications as nanosprings. To achieve advanced functionalities such as enhanced flexibility and impact absorption, precise and versatile shape design is essential. However, determining the lattice defect arrangements required to realize arbitrarily shaped helical CNTs remains a significant challenge. In this study, we propose a computational framework for constructing helical CNT structures with diverse geometries using the phase-field crystal (PFC) method. Unlike atomistic molecular dynamics approaches, the PFC method enables efficient simulation of defect-mediated structural evolution over diffusive time scales while retaining atomistic-scale periodicity. Previous PFC studies have primarily focused on the growth and defect dynamics of graphene crystals on planar surfaces, whereas simulations on curved surfaces and systematic investigations of the influence of initial conditions have been limited. Here, we extend the PFC framework to curved geometries and systematically analyze how variations in initial conditions affect defect formation, emergent helical morphology, and resulting mechanical properties. In particular, we quantify the relationship between defect distribution and the effective spring constant of the resulting nanospring structures. The ultimate objective of this work is to establish a defect-informed design strategy for CNT-based nanosprings with controllable geometry and tunable mechanical performance.

１．緒言

低次元ナノ炭素材料であるカーボンナノチューブ（Carbon Nanotube: CNT）は，1991 年に発見された炭素六員環構造からなる筒状物質であり，優れた力学特性，熱的性質，電気的特性を有することが知られている [1]．近年ではらせん状に成形された CNT についても実験および理論の両面から研究が進められている．らせん状 CNT や類似構造からなるナノスケールのコイルばねはナノスプリングと呼ばれ，NEMS（Nanoelectromechanical System）等におけるアクチュエーターやセンサーへの応用が期待されている [2]．特にらせん状 CNT は高いポテンシャルエネルギー密度を有しうると予測されており，次世代の高性能エネルギー貯蔵材料として注目されている [3]．

従来のらせん状 CNT シミュレーションモデルは，回位（五員環や七員環）やそれらが隣接する転位といった格子欠陥を人工的に導入し，規則的な面外変形によって曲面を形成する手法が主に用いられてきた．しかし，所望の力学特性・構造形状に着目し，エネルギー的に安定な原子スケール構造を幾何学パラメータに基づいて設計するいわゆる逆問題を解くことは一般に困難である．本研究では，らせん状 CNT のモデル構築に焦点を当て，結晶成長過程において結晶構造と格子欠陥の形成を自発的に表現できるフェーズフィールド・クリスタル（Phase Field Crystal: PFC）法を用い，任意のピッチ，らせん半径，素線直径を有するらせんチューブ曲面に適合した炭素原子配置を導出する手法を提案する．曲面における PFC 法については初期値や収束条件に関する報告例がほとんどなく，本研究では検討すべき課題として取り上げた．一方で，PFC 法のみでは材料の変形や物性の評価が困難であるため，得られたモデルを分子動力学（Molecular Dynamics: MD）法へと接続する．MD シミュレーションから，構築したモデルのばね定数等の力学特性を評価する．以上により，PFC 法と MD 法を連携させた一貫した解析手法を確立し，らせん状 CNT の構造設計および力学特性制御に関する指導原理の構築を目指す．

２．解析方法

PFC 法は Elder らによって提案された，結晶成長と材料組織予測のためのシミュレーション手法である．原子論的手法とは異なり，連続的なフェーズフィールド（PF）変数 ϕ の分布を用いて原子の六員環構造を再現する．ϕ に対する自由エネルギー汎関数と系のエネルギー減少を記述する Cahn-Hilliard 方程式から，ϕ の時間発展方程式が以下の通り導出される [4]．

$$\partial\phi/\partial t = \Delta[\{\varepsilon + (1+\Delta)^2\}\phi + \phi^3] \qquad (1)$$

ここで，ε は過冷却度である．らせんチューブの幾何学パラメータを定めたうえで，曲面上の空間微分には Laplace-Beltrami 作用素を利用し，差分法を用いて式(1)の時間発展を数値的に解いた．PFC 法で得られた結果を CNT の原子座標系へ変換した後，MD 法による力学解析をした．まず緩和計算により面外変形を含む構造最適化を行い，その後，引張シミュレーションを実施した．ポテンシャルエネルギー変化 ΔU，変位 x，ばね定数 k には $\Delta U = kx^2/2$ の関係が成り立つことを利用し，ばね定数を算出した．

本研究で構築したモデルは粗巻（図 1）および密巻（図 2）に分類される．各モデルについて，PF 変数の初期値にランダムな変動を与えたものと，等間隔に n か所（$n =$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

1, …, 12）で周状の変動を与えたものの計 13 種類の初期条件を検討した．その結果，全てのモデルでなめらかな曲面を有するらせん状 CNT が構築された．また，素線直径を 5.0-14.0 Å の範囲で 1.5 Å ずつ変化させ，ランダムな初期 PF 変数から構築したモデルの解析からは，本手法によるばね定数予測が妥当であることが明らかになった．

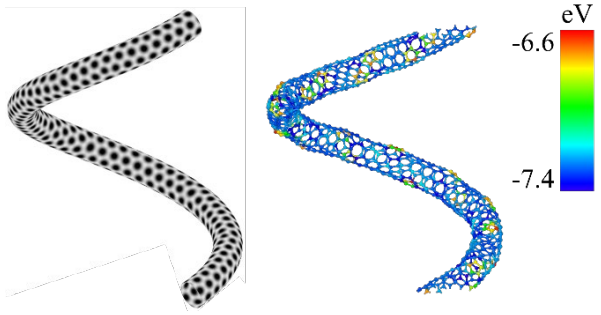


Fig. 1: Rough coiled CNT model.

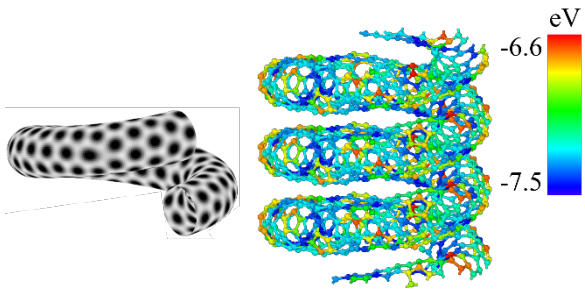


Fig. 2: Close coiled CNT model.

3．結果および考察

PFC 法シミュレーションにより，曲面に適合した回位や転位などの格子欠陥が自動的に導入された．得られた結果から導出したらせん状 CNT 構造に対して MD 法による緩和計算を行うことで，ポテンシャルエネルギーが最小化されたなめらかな曲面を有する構造が得られた．PF 変数について設定した 13 種類の初期条件のうち，周状の変動を与えた一部のモデルでは，ランダムな変動を与えたモデルと比較してエネルギー的により安定な構造が形成された．また，粗巻モデルについては ΔU と $x^2/2$ の関係において線形性が存在し，良好なばね特性を示すことが明らかになった．

一方，密巻モデルにおいては材料力学の理論値よりも著しく高いばね定数が得られた．図 3 に示すように，隣接するピッチのチューブが炭素原子間の非共有結合距離と同程度まで接近し，凝着が生じている箇所も見られたことから，ファンデルワールス力による相互作用がばね定数上昇の要因となっていることが推測される．素線直径を変化させた際のばね定数変化を図 4 に示す．素線直径の増加に伴いらせん状 CNT のばね定数は単調に増加し，解析結果は理論値の範囲内に収まることが判明した．本研究で得られた知見は，ナノスプリングの形状設計に対する有用な指針を与えるとともに，粗巻らせん CNT の力学特性に関する理解の深化に貢献するものである．

4．結言

- 差分格子と Laplace-Beltrami 演算子を用いて曲面上で PFC シミュレーションを行う独自の方法を提案し，構造や力学の解析に適する一貫した手法を開発した．
- PFC 法の初期条件について検討し，一般的に用いられるランダム変動は必ずしも最安定ならせん状 CNT 構造を導かないことが明らかになった．
- 粗巻モデルではナノスプリングとしての十分な性能が示された一方，密巻のらせん状 CNT では原子間の相互作用により，理論値よりも著しく高いばね定数が算出されたことは重要な知見である．
- 本研究のばね定数予測手法の妥当性が示され，素線直径はばね定数に対して支配的な影響因子であることが明らかになった．

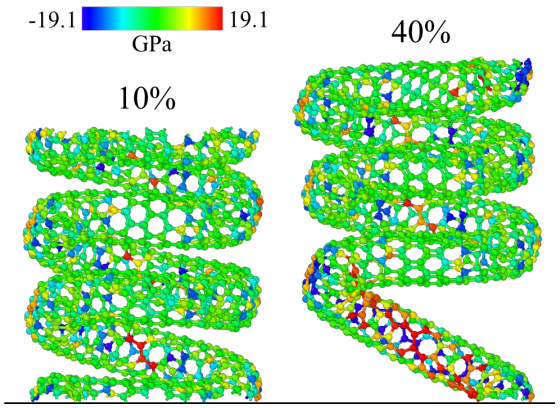


Fig. 3: Tensile simulation of a close coiled CNT model

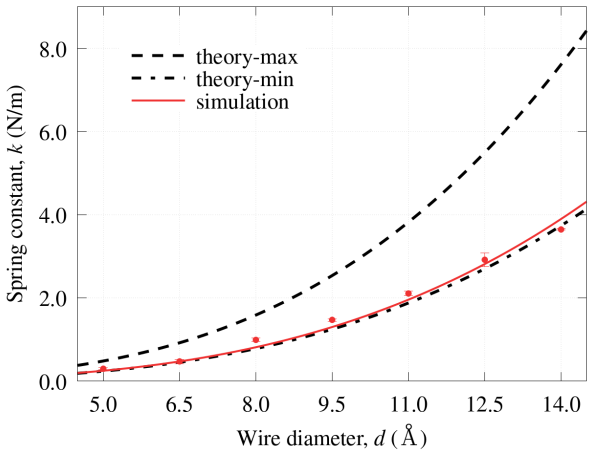


Fig. 4: Relationship between spring constant and wire diameter.

参考文献

1) S. Iijima, Nature, 354, 56 (1991).
2) B. A. Korgel, Science, 309, 1683 (2005).
3) F. A. Hill, T. F. Havel, and C. Livermore, Nanotechnology, 20, 255704 (2009).
4) K. R. Elder, M. Katakowski, M. Haataja, and M. Grant, Physical Review Letters, 88, 245701 (2002).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

有限変形奇弾性構成則の構築に向けた変形勾配の乗算分解に基づく超弾性モデル

Hyperelastic model based on multiplicative decomposition of deformation gradient toward constructing finite strain odd elastic constitutive law

松原　成志朗（東北大・工）　　志賀　美春（東北大・工）
中村　明莉（東北大・工）　　寺田　賢二郎（東北大・工）
Seishiro Matsubara, Tohoku University
Miharu Shiga, Tohoku University
Akari Nakamura, Tohoku University
Kenjiro Terada, Tohoku University
E-mail: seishiro.matsubara.b7@tohoku.ac.jp

The odd elastic constitutive law presumes that a continuum body only satisfies the linear momentum, establishing a linear relationship between stress and strain using an asymmetric operator. This property might enable us to represent the mechanical behavior of active metamaterials, while this constitutive law is based on small strain theory. In this study, we propose a hyperelastic model based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient toward constructing a finite strain odd elastic constitutive law. The main idea of this study is the conjugate transformation for an isochoric right stretch tensor, resulting in extracting the desirable deformation modes without competition. The performance of the proposed framework will be verified by evaluating deformation and stress modes for representative hyperelastic models.

1．はじめに

奇弾性構成則は，連続体が並進の運動量保存則のみを満足すると仮定し，非対称な線形作用素によって応力とひずみを関係づける [1]．また，本構成則では力学的エネルギー保存則が要請されず，連続体は任意のひずみサイクルのなかで外界に対して正の仕事をする．そのため，圧電素子などのエネルギー生成材料を微視構造に含むアクティブメタマテリアルの巨視的な力学挙動を表現し得るとして注目を集めている [2]．

しかし，奇弾性構成則はこれまで微小変形理論の枠組みでしか調査されていない．アクティブメタマテリアルの素材となるのは変形能に優れるゴムやゲルであることを勘案すると，現状の奇弾性構成則を工学応用に結び付けることは困難であると考えられる．

そこで本研究では，有限変形奇弾性構成則の構築に向けて，まずは変形勾配テンソルの乗算分解に基づく超弾性モデルを提案し，その基本的な性能を数値的に評価する．

2．微小変形理論の枠組みでの奇弾性構成則

2 次元の連続体について，微小変形理論の枠組みでの奇弾性構成則は次式で定義される [1]．

$$\begin{pmatrix} \sigma_0^{\mathrm{odd}} \\ \sigma_1^{\mathrm{odd}} \\ \sigma_2^{\mathrm{odd}} \\ \sigma_3^{\mathrm{odd}} \end{pmatrix} = \mathbb{C}^{\mathrm{odd}} \begin{pmatrix} H_0^{\mathrm{odd}} \\ H_1^{\mathrm{odd}} \\ H_2^{\mathrm{odd}} \\ H_3^{\mathrm{odd}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで，$\mathbb{C}^{\mathrm{odd}}$は非対称な線形作用素であり，本研究では奇弾性係数行列と呼称する．また，$\sigma_\alpha^{\mathrm{odd}}, H_\alpha^{\mathrm{odd}}\ (\alpha = 0,1,2,3)$はそれぞれ奇弾性応力成分と奇弾性ひずみ成分であり，基底テンソル$\boldsymbol{\tau}_\alpha$を用いて応力$\boldsymbol{\sigma}$, 変位勾配テンソル$\boldsymbol{H}$とそれぞれ次の関係にある．

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=0}^{3} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{\mathrm{odd}} \quad \because \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\sigma_\alpha^{\mathrm{odd}}\boldsymbol{\tau}_\alpha \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H} = \sum_{\alpha=0}^{3} \boldsymbol{H}_\alpha^{\mathrm{odd}} \quad \because \boldsymbol{H}_\alpha^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}H_\alpha^{\mathrm{odd}}\boldsymbol{\tau}_\alpha \tag{3}$$

微小変形理論における各奇弾性成分の物理的意味を図 1 に示す．微小変形理論における変位勾配テンソルとは連続体の微小な相対位置を対応する相対変位場に写像するもの（$d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{H}d\boldsymbol{x}$）であり，各奇弾性ひずみ成分の物理的意味も明確である．そのため，対応する奇弾性応力成分の意味も明確であって，図的に理解することができる．ところが，有限変形理論においては変形後の形状が現配置を参照するため，例えば等容軸変形と純せん断を示すモード 2 と 3 が等積変形になっておらず, モード分解が正しく行われない．

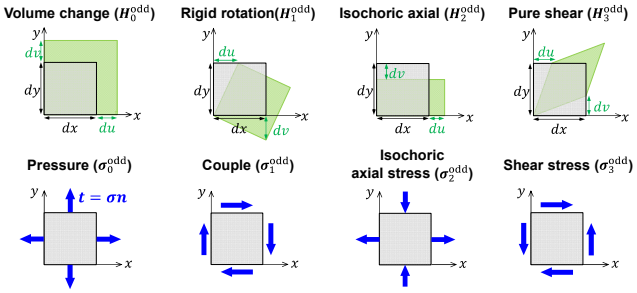


Fig.1 Physical meaning of each odd elastic component in small strain theory.

3．変形勾配の乗算分解に基づく超弾性モデル

第 2 節で問題とした変形モード同士のバッティングを避けるために，変形勾配テンソル$\boldsymbol{F}$の乗算分解に基づいて定式化を進める．まず，物体の膨張・収縮変形と等容変形は次の Flory の乗算分解を用いて分けることができる．

$$\boldsymbol{F} = J^{\frac{1}{3}}\overline{\boldsymbol{F}} \tag{4}$$

ここで，Jは体積変形ヤコビアン，$\overline{\boldsymbol{F}} \neq \overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}$は等容変形勾配であり，$\det(\overline{\boldsymbol{F}}) = 1$を満たす．また，物体の回転を抽出するために，$\overline{\boldsymbol{F}}$に対して次の極分解を考える．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{U}} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{R}$と$\bar{\boldsymbol{U}}$は$\bar{\boldsymbol{F}}$に関する回転テンソルと等容右ストレッチテンソルであり，それぞれ$\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \det(\boldsymbol{R}) = 1$と$\bar{\boldsymbol{U}} = \bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}, \det(\bar{\boldsymbol{U}}) = 1$となる．このとき，奇弾性ひずみに係る膨張・収縮成分と剛体回転成分はそれぞれJと$\boldsymbol{R}$で表現でき，等容変形成分は$\bar{\boldsymbol{U}}$で表現できる．しかし，等容変形成分の分解に関しては，基底テンソル$\boldsymbol{\tau}_\alpha$を用いた成分分解はできない（厳密には，変形が微小である場合のみ妥当）．そこでまず，等容軸変形成分を表現する右ストレッチテンソルを次式で定義する．

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{dim}}} \lambda_i^{\mathrm{dg}} \boldsymbol{E}_i \otimes \boldsymbol{E}_i = \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{E}_i$は初期配置の基底ベクトルである．また，$\det\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right) = 1$より$\prod_{i=1}^{n_{\mathrm{dim}}} \lambda_i^{\mathrm{dg}} = 1$である．$\lambda_i^{\mathrm{dg}}$の求め方は様々考えられるが，本研究では，$\bar{\boldsymbol{F}}$に関する右 Cauchy-Green テンソル$\bar{\boldsymbol{C}} = \bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}$を用いて$\lambda^{\mathrm{dg}} = \sqrt{f(\bar{\boldsymbol{C}})}$と定義し，2 次元空間（$n_{\mathrm{dim}} = 2$）のときは，平面ひずみ：$\lambda_1^{\mathrm{dg}} = \lambda^{\mathrm{dg}}, \lambda_2^{\mathrm{dg}} = \left(\lambda^{\mathrm{dg}}\right)^{-1}$，3 次元空間（$n_{\mathrm{dim}} = 3$）のときは，単軸：$\lambda_1^{\mathrm{dg}} = \lambda^{\mathrm{dg}}, \lambda_2^{\mathrm{dg}} = \lambda_3^{\mathrm{dg}} = \left(\lambda^{\mathrm{dg}}\right)^{-\frac{1}{2}}$として$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}$を特定する．なお，$f(\bar{\boldsymbol{C}}) = \boldsymbol{E}_j \cdot \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{E}_j$のときは，指定した基底ベクトル方向$\boldsymbol{E}_j$に軸応力寄与が生じる．また，任意の配向ベクトル$\boldsymbol{a}_0$を用いて$f(\bar{\boldsymbol{C}}) = \boldsymbol{a}_0 \cdot \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{a}_0$とするとき，$f(\bar{\boldsymbol{C}})$は$\bar{\boldsymbol{F}}$に関するひずみの第四不変量になる．次に，$\bar{\boldsymbol{U}}$から$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}$を除いた右ストレッチテンソルとして次式を定義する．

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}} = \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{\boldsymbol{U}} \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

ここで，$\det(\bar{\boldsymbol{U}}) = 1, \det\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right) = 1$より$\det\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}\right) = 1$となる．$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}$は軸方向等容伸長を公平に取り除いた残りの純粋等容変形（以下，等容非軸変形）を表し，純せん断と厳密に一致はしないが，少なくとも軸変形以外の等容変形を純粋に表現するものとして扱うことが可能である．また，$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}$と$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}$は正定値対称テンソルである．

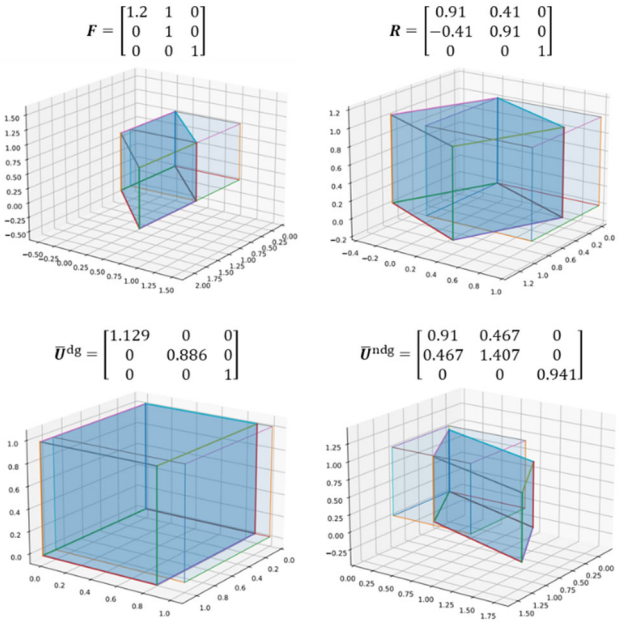


Fig.2 Deformation modes in proposed decomposition way.

本研究で提案する変形モード分解の性能を次式の変形勾配テンソルを例として調査する．

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

図 2 からわかるように，乗算分解後の各ひずみ成分は正しく所望の変形を表現していることがわかる．

有限変形理論に基づく奇弾性構成則の構築にあたって，まずは力学的エネルギー保存則と角運動量保存則が成立し，ひずみエネルギー関数が定義できる場合を考える．いま，等方性超弾性体のひずみエネルギー関数が次式で記述できると仮定する．

$$\psi(\boldsymbol{F}) = \psi^{\mathrm{vol}}(J) + \psi^{\mathrm{dg}}\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right) + \psi^{\mathrm{ndg}}\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}\right) \tag{9}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}$と$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}$は正定値対称な右ストレッチテンソルなので客観的な量であり，式(9)から導かれる超弾性構成則は客観性を満たす．また，ψ^{dg}とψ^{ndg}は等方テンソル関数であり，$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}$と$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}$に対応する右 Cauchy-Green テンソル$\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{dg}} = \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\right)^2$と$\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{ndg}} = \left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}\right)^2$のひずみ不変量を独立変数とする次の表現が可能である．

$$\psi^{\mathrm{A}}\left(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{A}}\right) = \psi^{\mathrm{A}}\left(I_1^{\mathrm{A}}, I_2^{\mathrm{A}}\right) \quad \because \mathrm{A} = \{\mathrm{dg}, \mathrm{ndg}\} \tag{10}$$

ここで，$I_1^{\mathrm{A}} = \mathrm{tr}\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{A}}\right)$，$I_2^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}^2\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{A}}\right) - \mathrm{tr}\left\{\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{A}}\right)^2\right\}\right]$であり，第三不変量は等容性により 1 である．なお，本研究の仮定より，$\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}} = \bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{dg}}\left(\lambda^{\mathrm{dg}}\right)$であるため，$\psi^{\mathrm{dg}} = \psi^{\mathrm{dg}}\left(\lambda^{\mathrm{dg}}\right)$となる．以上より，ひずみエネルギー関数は$\psi(\boldsymbol{F}) = \psi(\boldsymbol{C})$であり，第二 Piola-Kirchhoff 応力は次式で得られる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = J\frac{\partial \psi^{\mathrm{vol}}}{\partial J}\boldsymbol{C}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}}\mathrm{DEV}\Bigg[&\frac{1}{\lambda^{\mathrm{dg}}}\frac{\partial \psi^{\mathrm{dg}}}{\partial \lambda^{\mathrm{dg}}}\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{C}})}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}} \\ &+ 4\left(\xi_1 \mathbf{1} - \xi_2 \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{ndg}}\right) : \bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}\mathbb{X}\Bigg] \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，任意の 2 階テンソル$\boldsymbol{A}$について$\mathrm{DEV}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{A}:\bar{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{C}^{-1}$である．また，$\xi_1, \xi_2, \mathbb{X}$はそれぞれ次式となる．

$$\xi_1 = \frac{\partial \psi^{\mathrm{ndg}}}{\partial I_1^{\mathrm{ndg}}} + I_1^{\mathrm{ndg}}\frac{\partial \psi^{\mathrm{ndg}}}{\partial I_2^{\mathrm{ndg}}}, \quad \xi_2 = \frac{\partial \psi^{\mathrm{ndg}}}{\partial I_2^{\mathrm{ndg}}} \tag{12}$$

$$\mathbb{X} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{ndg}}}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}} \tag{13}$$

本研究で提案する構成則の性能は，様々な代表的な超弾性モデルについての応力を評価することによって調査する．

4．結言

本研究では，有限変形奇弾性構成則の構築に向けて，変形勾配の乗算分解による超弾性モデルを定式化した．微小変形理論の枠組みにおける奇弾性構成則で扱われる各ひずみ成分を有限変形理論の枠組みで記述するために，Flory 分解や極分解に加え，等容軸変形の定義と共役変換による等容非軸変形を新たに導入した．それぞれのひずみ成分は理論的にほぼ単一の変形モードを表現することができ，有限変形奇弾性構成則の構築に活路を見出すことができた．

参考文献

1) C. Scheibner et al., Nat. Phys., 16, 475-480, 2020.
2) Y. Wang et al., J. Mech. Phys. Solids, 182, 105462, 2024.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-07：形態と機能の材料力学）

2026年5月16日(土) 10:35 ~ 11:50 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-07 (2)

座長:雷 霄雯(東京科学大学)

10:35 ~ 10:50

[16006] 薄膜リンクル平坦化現象における濡れ性と膜厚の影響

*上野 誠太[1]、永島 壮[1]、兒嶋 佑太[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

10:50 ~ 11:05

[16007] エラストマー上における銀ナノワイヤの座屈

*村田 瞭介[1]、永島 壮[1]、兒嶋 佑太[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

11:05 ~ 11:20

[16008] Sobolev学習MLPによるノンレシプロカルゲルのサロゲートモデルの構築と実装

*兒嶋 佑太[1]、余語 勇哉[1]、稲前 有人[1]、永島 壮[1]、奥村 大[1] (1. 名古屋大学)

11:20 ~ 11:35

[16009] 情報幾何学を用いた高分子のアフィンネットワークモデルの変形過程の解析

*西川 皐太[1]、小林 舜典[1]、畝山 多加志[2]、垂水 竜一[1] (1. 大阪大学、2. 名古屋大学)

11:35 ~ 11:50

[16010] 力学的に等価な結晶欠陥配置の形態解析

*小林 舜典[1]、垂水 竜一[1] (1. 大阪大学)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

薄膜リンクル平坦化現象における濡れ性と膜厚の影響
Effects of wettability and thickness on droplet-induced wrinkle flattening

上野　誠太（名大・工）　永島　壮（名大・工）　兒嶋　佑太（名大・工）　奥村　大（名大・工）
Seita UENO, Nagoya University
So NAGASHIMA, Nagoya University
Yuta KOJIMA, Nagoya University
Dai OKUMURA, Nagoya University
E-mail: so.nagashima@nagoya-u.jp

It has recently been reported that wrinkles on bilayers consisting of a soft substrate and a metal thin film become flattened upon contact with water droplets. Although previous studies have suggested that surface wettability is a factor governing this phenomenon, the underlying mechanism remains unclear. In this study, we investigate the effects of wettability and film thickness on wrinkle flattening through in situ microscopic observations using thin metal films formed on elastomer substrates.

1．緒言
軟質基板と硬質薄膜から成る二層構造体に対し，臨界値を超える面内圧縮応力が作用すると，薄膜の座屈が生じ，リンクルをはじめとしたしわパターンが形成される．この現象は表面不安定と呼ばれ，フレキシブル・ストレッチャブルセンサの開発 [1]をはじめとした工学的応用への展開が期待されている．

このような状況の中，水滴との接触により生じるリンクル平坦化現象が報告された [2]．薄膜表面の濡れ性，膜厚，膜と基板の弾性率比，および圧縮ひずみが現象の影響因子であることが明らかにされたが [3]，実現象における詳細は依然として不明である．一方，硬質薄膜として広範に用いられる白金（Pt）は，成膜完了時点からの経過時間に応じて濡れ性が変化することが報告されている [4]．

そこで本研究は，汎用エラストマーであるポリジメチルシロキサン（PDMS）と Pt 薄膜から成る二層構造体を用い，リンクル平坦化現象に及ぼす濡れ性および膜厚の影響を実験により調査することを目的とした．

2．実験方法
まず，Pt 薄膜の濡れ性を評価した．シリコンウェハ基板にイオンスパッタ装置（JEC-3000FC, JEOL）を用いて Pt を成膜し，成膜完了後，所定の時点で薄膜上に水滴を静置し，その静的接触角を測定した．以上により，接触角の経時変化を評価した．次に，PDMS 基板の表面に Pt を成膜した試料を用いてリンクル平坦化実験を行った．まず，シリコーンポッティング材（Sylgard 184, Dow）を用いて PDMS 基板を作製した．主剤と架橋剤の重量混合比を 40:1 とし，硬化温度を 90℃，硬化時間を 2 時間とした．次に，作製した PDMS 基板に対して単軸方向に引張の予ひずみを付与し，様々な厚さの Pt を成膜した．成膜完了後，基板の予ひずみを除去することにより薄膜の圧縮変形を誘発した．上述の接触角測定結果に基づき，所定の時点で水滴（0.7 μL）を圧縮変形した薄膜上に静置し，表面形状をレーザ顕微鏡（VK-X3000, Keyence）で観察した．以上により，リンクル平坦化に及ぼす濡れ性および膜厚の影響を調べた．

3．実験結果と考察
シリコンウェハ上に成膜した Pt 薄膜について濡れ性を評価した結果，時間経過に伴う膜表面の疎水化が確認された．接触角の経時変化評価結果に基づき，成膜完了時から 5 分後に PDMS 基板上の Pt 薄膜に水滴を静置した場合のレーザ顕微鏡画像を Fig. 1 に示す．固気液三相接触線の近傍においてリンクルの平坦化が観察された．また，成膜からの時間経過によって膜表面が疎水化するにつれ，平坦化距離が減少することがわかった．さらに，接触角が一定の場合，膜厚が増大するほど，平坦化が抑制されやすい傾向が明らかになった．

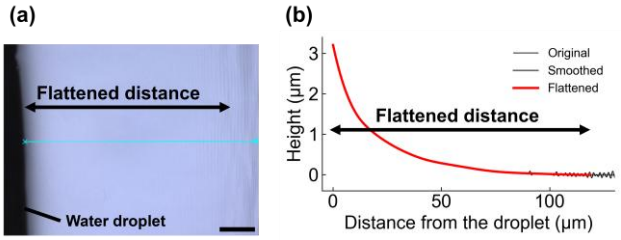


Fig. 1 Microscope image (a) and line profiles (b) of wrinkles flattened by a water droplet. Scale bar: 20 μm.

4．結言
Pt 薄膜と PDMS 基板から成る二層構造体において，表面の疎水化および膜厚の増大により，水滴に駆動されるリンクル平坦化現象を抑制できることを明らかにした．本研究で獲得した知見は，水滴接触環境におけるリンクルを活用した機能性表面の開発に結びつくことが期待される．

謝辞　本研究は，JSPS 科研費（JP25H00706）および JST 創発的研究支援事業（JPMJFR222K）の支援を受けて実施された．ここに記して謝意を表す．

参考文献
1) G. Lee, M. Zarei, Q. Wei, Y. Zhu and S.G. Lee: Surface wrinkling for flexible and stretchable sensors, Small, 18, 2203491, 2022.
2) S. Nagashima and A. Nakatani: Capillary-induced wrinkle-to-fold transitions under biaxial compression, Langmuir, 37, pp. 5282–5289, 2021.
3) S. Nagashima, R. Okamoto, S. Matsubara and D. Okumura: Soft wetting of film–substrate bilayers: Wrinkle flattening near the three-phase contact line, International Journal of Multiphase Flow, 191, 105324, 2025.
4) Z. Li, P. Beck, D.A.A. Ohlberg, D.R. Stewart and R.S. Williams: Surface properties of platinum thin films as a function of plasma treatment conditions, Surface Science, 529, pp. 410–418, 2003.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

エラストマー上における銀ナノワイヤの座屈
Buckling of silver nanowires on elastomer substrates

村田　瞭介（名大・工）　永島　壮（名大・工）　兒嶋　佑太（名大・工）　奥村　大（名大・工）
Ryousuke MURATA, Nagoya University
So NAGASHIMA, Nagoya University
Yuta Kojima, Nagoya University
Dai Okumura, Nagoya University
E-mail: so.nagashima@nagoya-u.jp

Silver nanowires, which have excellent electrical conductivity and optical transparency, are widely used in stretchable electronic devices. Although they are known to buckle under compression, the underlying mechanism remains unclear. In this study, we investigate the buckling behavior of silver nanowires on elastomer substrates through in situ atomic force microscopy observations. Silver nanowires with various diameters were examined on polydimethylsiloxane (PDMS) substrates with different elastic moduli. The results show that the wavelength and amplitude of the buckled nanowires depend on the nanowire diameter, compressive strain, and the elastic modulus of the PDMS substrate.

１．緒言
近年，ナノワイヤを用いた機能性デバイスの研究開発が推進されている．特に，銀ナノワイヤは，その優れた導電性や光透過性から，伸縮性透明デバイスの構成材料として利用されている [1]．一方，デバイスの変形に伴い，銀ナノワイヤの圧縮変形や座屈が生じるが，その制御メカニズムについては，依然として未解明な点が存在する．

そこで本研究では，エラストマー基板上に配置した銀ナノワイヤの座屈挙動を顕微鏡その場観察実験により調査した．特に，基板の弾性率およびナノワイヤの直径が座屈に及ぼす影響を明らかにすることを目的とした．

２．実験方法
本研究では，ポリジメチルシロキサン（PDMS）を基板として使用した．基板の弾性率を変化させるために，PDMS 作製時の主剤と架橋剤の重量混合比を 10:1, 20:1, 40:1 とした．銀ナノワイヤは，直径が 25 nm および 45 nm のものを使用した．単軸方向に引張予ひずみを付与した PDMS 基板に銀ナノワイヤを静置したのち，予ひずみを段階的に除去した．以上により，銀ナノワイヤに圧縮ひずみを付与し，圧縮変形および座屈を誘起した．レーザー顕微鏡および原子間力顕微鏡を用いたその場観察により，変形過程を定量的に評価した．

３．実験結果および考察
いずれの実験条件においても，圧縮過程で銀ナノワイヤの座屈が観察された．一方，その幾何形状や寸法は，基板の弾性率，銀ナノワイヤの直径，および圧縮ひずみに応じて様々に変化した．座屈した銀ナノワイヤの代表的な原子間力顕微鏡画像を Fig. 1 に示す．重量混合比 10:1（弾性率約 2 MPa）の PDMS 基板を使用し，銀ナノワイヤの直径は約 45 nm，圧縮ひずみは 0.21 である．局所的に鋭利な先端を有した正弦波状の座屈形状が観察された．一方，重量混合比 40:1（弾性率約 0.04 MPa）の PDMS 基板上では，銀ナノワイヤは正弦波状の座屈形状を保持したまま，圧縮ひずみの増大に伴う振幅の増大を示し，鋭利な先端形状は発生しなかった．以上の重量混合比の違いによる座屈形状の変化は，銀ナノワイヤの密着強度の差異に起因すると考えられる．PDMS においては，重量混合比の低減により，表面の未架橋鎖が減少し，他の固体材料との密着強度が低下する [2]．そのため，重量混合比 10:1 では，圧縮過程で銀ナノワイヤのはく離が局所的に生じ得る．その結果，面内変形から面外変形への遷移，ならびにねじれが発生し，鋭利な先端形状が出現したと考えられる．レーザー顕微鏡により正弦波状銀ナノワイヤの波長と振幅を測定した結果，PDMS の弾性率が低下し，銀ナノワイヤの直径が増大するほど，波長と振幅が増大した．さらに，圧縮ひずみの増大に伴い，振幅が増大した一方，波長は顕著な変化は見られなかった．以上により，基板の弾性率およびナノワイヤの直径が銀ナノワイヤの座屈に及ぼす影響を明らかにした．

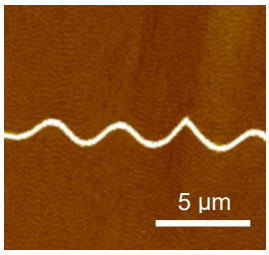


Fig. 1 Atomic force microscope image of a buckled silver nanowire on a PDMS substrate.

４．結言
顕微鏡その場観察実験により，PDMS 基板上における銀ナノワイヤの座屈挙動を調査した．その結果．基板の弾性率，ナノワイヤの直径，および圧縮ひずみが，座屈現象の影響因子であることを明らかにした．これらの因子を調節することにより，座屈の抑制あるいは積極的活用が可能となる．

謝辞　本研究は，JST 創発的研究支援事業（JPMJFR222K）の支援を受けて実施された．ここに記して謝意を表す．

参考文献
1) B. S. Kim, H. Kwon, H. J. Kwon, J. B. Pyo, J. Oh, S. Y. Hong, J. H. Park, K. Char, J. S. Ha, J. G. Son and S-.S. Lee: Buckling instability control of 1D nanowire networks for a large-area stretchable and transparent electrode, Advanced Functional Materials, 30, 1910214, 2020.
2) Y. Yu, D. Sanchez and N. Lu: Work of adhesion/separation between soft elastomers of different mixing ratios, Journal of Materials Research, 30, pp. 2702–2712, 2015.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

Sobolev 学習 MLP によるノンレシプロカルゲルのサロゲートモデルの構築と実装
Construction and Implementation of a Surrogate Model for Non-reciprocal Gels Using Sobolev-trained MLP

兒嶋 佑太（名古屋大） 余語 勇哉（名古屋大） 稲前 有人（名古屋大） 永島 壮（名古屋大）
奥村 大（名古屋大）
Yuta KOJIMA, Nagoya University Yuya YOGO, Nagoya University Yuto INAMAE, Nagoya University So NAGASHIMA, Nagoya University Dai OKUMURA, Nagoya University
E-mail: yuta.kojima@nagoya-u.jp

This study aims to construct and implement a multiscale surrogate model capable of reproducing the highly nonlinear behavior of non-reciprocal materials by linking the microscopic buckling behavior of nanosheets with the macroscopic mechanical response. Specifically, we construct a Multi-layer Perceptron (MLP) incorporating Sobolev training, which simultaneously learns stress values and tangent stiffness. The MLP model predicts the true stress and tangent stiffness from the logarithmic strain of the unit cell. This approach enables the model to learn the complex tangent stiffness tensor characteristic of non-reciprocal materials. In this paper, we detail the construction methodology of the proposed model and demonstrate its prediction accuracy and effectiveness through validation experiments targeting nanosheet-embedded gels.

１．はじめに

近年，外部環境に応じて特異な応答を示すスマートマテリアルの開発が進む中で，金属ナノシートをゲル内部に配向させた相反性崩壊材料であるノンレシプロカルゲルが注目されている(1,2)．ノンレシプロカルゲルは，ナノシートの配向方向への引張負荷に対しては高い剛性を示す一方で，圧縮負荷に対してはシートの座屈により剛性が著しく低下し，母材であるゲル支配の柔軟な剛性を示す．そのため，ソフトロボットや次世代アクチュエータへの応用が期待される一方で，その挙動を正確に記述する数理モデルの構築は極めて困難であり，デバイス設計におけるボトルネックとなっている．

有限要素法（Finite element method; FEM）を用いてノンレシプロカルゲルの解析を行う研究も行われている．例えば，増分形式の応力-ひずみ関係を Abaqus(3) のユーザー材料サブルーチンで実装する研究(4)が行われている．しかしながら，除荷後に変形が残留するという課題がある．加えては，ミクロ構造におけるナノシートの座屈を考慮した解析は行われていない．

そこで本研究では，ミクロなナノシートの座屈挙動とマクロな力学応答を結びつけることで，相反性崩壊材料の高度な非線形挙動を再現可能なマルチスケールサロゲートモデルの構築と実装を目的とする．具体的には，応力値とその接線剛性を同時に学習させる Sobolev 学習を導入した Multi-layer perceptron（MLP）を構成する．MLP モデルはユニットセルの対数ひずみから真応力および，接線剛性を予測する．これにより相反性破壊材料特有の複雑な接線剛性テンソルを学習させる．本稿では，提案モデルの構築手法を詳述するとともに，ナノシート含有ゲルを対象とした検証実験を通じて，その予測精度と有効性を明らかにする．

２．方法

２．１．データセット作成

本研究では，ナノシート含有ゲルの非線形力学挙動をサロゲートモデル化するため，入力に対数ひずみ（3 成分），出力に真応力（3 成分）を用いる．さらに，構成則の数値計算における収束安定性を保証するため，応力のひずみ微分である接線剛性（3×3 成分）も教師データとして使用した．今回使用した損失関数は$L = MSE_\sigma + \lambda \cdot MSE_C$である．

学習データを作成する際，$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$をそれぞれ 0 に近づくにつれて密度が高くなるように傾斜をかけて 21 通り，計 9261 通りのひずみと応力を抽出し，その値を使って接線剛性を作成した．

２．２．データセット作成

サロゲートモデルの構築には，応力とその接線剛性を同時に学習する Sobolev MLP を用いた．Fig. 1 にモデルの概略図を示す．モデル構造は，入力層（3 ノード），3 層の隠れ層（各 64 ノード），出力層（3 ノード）からなる全結合型ニューラルネットワークである．活性化関数には，滑らかな微分特性を持つ SiLU（Sigmoid Linear Unit）関数を採用した．損失関数$\mathcal{L}$には，応力の平均二乗誤差（MSE）に加え，接線剛性の MSE を重み付けして加算した定義を用い，$\lambda = 0.05$と設定した．

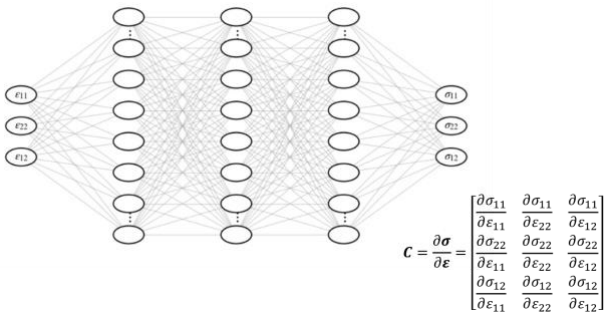


Fig. 1 Architecture of Sobolev MLP with Jacobian training.

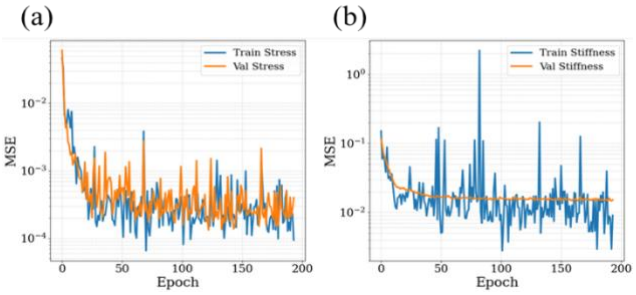


Fig. 2 Learning curves for stress and stiffness errors.
(a) Mean squared error of stress and (b) stiffness.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

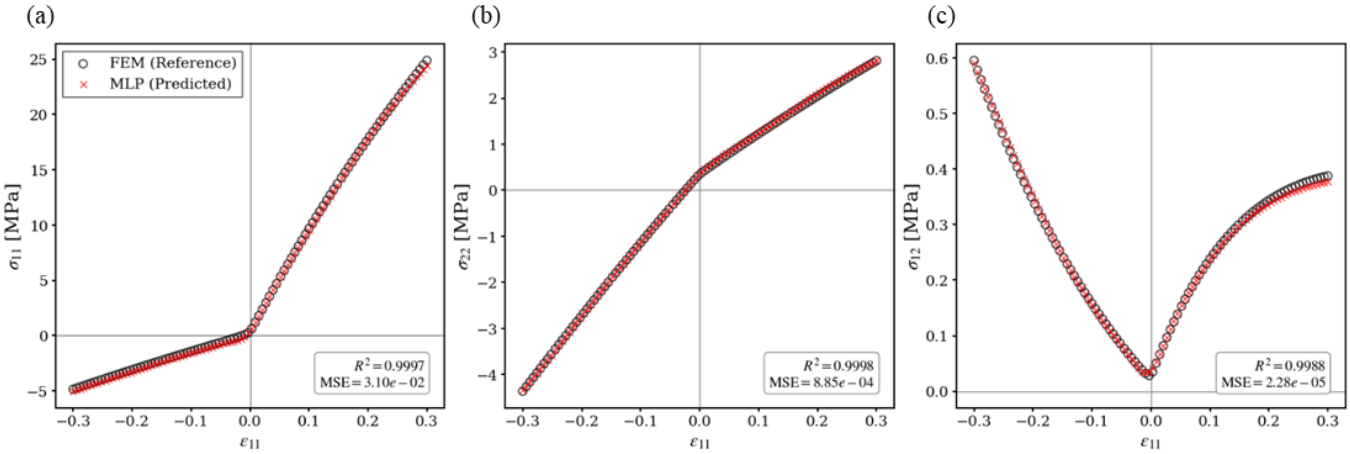


Fig. 3 Prediction accuracy for a specific loading path ($\varepsilon_{22} = 0.03$, $\varepsilon_{12} = 0.16$). (a)σ_{11}, (b)σ_{22}, (c)σ_{12}.

３．結果

構築した Sobolev MLP の学習曲線（損失関数の推移）を Fig. 2 に示す．学習の進行に伴い，応力誤差だけでなく，接線剛性の誤差も同時に低減していることが確認できる．これは，SiLU 関数を用いた滑らかなモデル表現と，Sobolev 学習による微分制約が有効に機能していることを示している．

構築したモデルの汎化性能を検証するため，学習に使用していない未知の変形モードに対する予測を行った．検証条件として，入力ひずみベクトル$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]$において，$\varepsilon_{22} = 0.03$, $\varepsilon_{12} = 0.16$ に固定し，ε_{11}を-0.3 から 0.3 の範囲で推移させた際の応力応答を計算した．Fig. 3 に FEM と MLP による予測値の比較を示す．(a)はσ_{11}，(b)はσ_{22}，(c)はσ_{12} である．図より，赤色の予測プロットは青色の実験値を極めて正確にトレースしていることがわかる．特に，$\varepsilon_{11} = 0$ 付近で見られる応力勾配の急激な変化や，複合的な応力状態における挙動を正しく再現できている．定量的な評価指標である決定係数R^2 は，全ての応力成分において 0.999 以上であった．これは，Sobolev 学習によって応力値だけでなく接線剛性を直接学習させたことで，局所的な非線形挙動の再現性が大幅に向上したためと考えられる．

４．結言

本研究では，相反性崩壊材料であるノンレシプロカルゲルの複雑な非線形挙動を記述するため，Sobolev 学習を導入した MLP によるサロゲートモデル構築手法を提案した．本手法の最大の特徴は，ひずみから応力に加えて接線剛性を明示的に予測させる点である．既存研究では考慮されていないミクロなナノシートの座屈挙動とマクロな力学応答を結びつけることができた．検証実験の結果，提案モデルは未学習の変形モードに対して$R^2 > 0.999$ もの精度を達成し，物理的に妥当な接線剛性の推移を再現できることが確認された．これは，データ駆動型アプローチが，複雑な新奇材料の構成則モデリングにおいて極めて有効であることを示している．今後は，本モデルを汎用有限要素法ソルバーへ実装し，大規模な構造解析へと適用を展開する予定である．

参考文献

(1) 布施卓馬，松原成志朗，永島壮，奥村大，「均質化解析によるノンレシプロカルゲルの引張・圧縮非対称性評価」，計算数理工学論文集，Vol. 23，19-231124，(2023).
(2) H. Kim, I. Jeong, H. Cho, M. Cho, "Surrogate Model Based on Data-Driven Model Reduction for Inelastic Behavior of Composite Microstructure", International Journal of Aeronautical and Space Sciences, Vol. 24, 732-752, (2023).
(3) Abaqus 6.14 User Documentation, 2014, Dassault Systems SIMULIA Coorporation.
(4) 野々垣翔真，松原成志朗，永島壮，奥村大，「ノンレシプロカルゲルの円筒押込み大変形解析」，計算数理工学論文集，Vol. 23，17-231124，(2023).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

情報幾何学を用いた高分子のアフィンネットワークモデルの変形過程の解析
Information Geometric Analysis of Deformation of Polymers using Affine Network Model

西川　皐太（大阪大・基礎工）　　小林　舜典（大阪大・基礎工）
畝山　多加志（名古屋大・工）　　垂水　竜一（大阪大・基礎工）
Kota NISHIKAWA, The University of Osaka
Shunsuke KOBAYASHI, The University of Osaka
Takashi UNEYAMA, Nagoya University
Ryuichi TARUMI, The University of Osaka
E-mail: nishikawa.kota.91u@ecs.osaka-u.ac.jp

Elucidating the mechanical properties of polymeric materials is crucial for developing high-performance materials. However, the affine network model, which describes material deformation through the probability density function of polymer chains, has not fully utilized this statistical information. In this analysis, the probability density function representing the state of polymer chains is regarded as information denoting the microscopic state of the system. Additionally, Wasserstein information geometry, which measures the transport cost of probability distributions, is introduced onto the statistical manifold formed by these probability density functions. For the relaxation deformation process of elastomers, the geodesic, representing the shortest path of information, is compared with the steepest descent curve of the free energy. The results reveal a clear discrepancy between the two paths, indicating that the spontaneous relaxation process does not necessarily follow the transport-theoretically optimal route. By evaluating the contribution of thermodynamic forces resisting path constraints during deformation, based on the difference between this informational shortest path and the mechanical path, this study aims to clarify the relationship between information and mechanics in the deformation process.

１．緒言

高分子材料であるエラストマーの力学特性の解明は，高性能な材料を設計・開発する上で極めて重要である．ゴムなどのエラストマーはエントロピー弾性による巨大な弾性変形が特徴的であり，この変形挙動を記述する代表的な統計モデルの一つにアフィンネットワークモデルがある [1]．このモデルでは，高分子鎖の状態がガウス分布という確率密度関数(PDF)で表現されるため，これを系のミクロな状態を示す「情報」として捉えることができる．従来のエラストマーの研究においては，このモデルを用いることで，自由エネルギーや応力などのマクロな力学量が統計力学的に解析されてきた [2]．しかしながら，ミクロな高分子鎖の分布変化を示す情報の発展過程と力学の関係はこれまでに十分解析されていない．そこで本研究では，連続体の変形に情報幾何学の視点を取り入れ，変形過程における PDF の変化を統計多様体における測地線上の遷移として記述することで，エントロピー弾性における「情報」と「力学」の関係を明らかにすることを目的とする．

２．解析手法

本研究では，ゴム状高分子材料の微視的構造を記述するアフィンネットワークモデルを対象に，非圧縮条件下における二軸変形の解析を情報幾何学の観点で行う．このモデルにおいて，高分子鎖の末端間ベクトル$\boldsymbol{r}$の分布は，無変形状態では等方的なガウス分布として表現される．ここにマクロな変形として変形勾配$\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,1/(\lambda_1\lambda_2))$が与えられたとき，アフィン変形の仮定を通して，分布は二軸変形の主ストレッチλ_1,λ_2に依存した非等方的なガウス分布へと変化する．この現状態における確率密度関数$P(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{F})$は以下のように表される．

$$P(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{F})=\left(\frac{3}{2\pi Nb^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{3}{2Nb^2}\left(\frac{x^2}{\lambda_1^2}+\frac{y^2}{\lambda_2^2}+\lambda_1^2\lambda_2^2z^2\right)\right\} \quad (1)$$

これにより，変形状態の集合は変形パラメータを座標とする統計多様体$\mathcal{M}=\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2|\lambda_1>0,\lambda_2>0\}$を構成する．本研究では，任意のアフィン変形状態から自由エネルギー最小状態である安定点へと至る緩和変形過程を対象に，以下の二つの異なる視点から変形経路を比較する．まず，力学的な視点である．熱力学第二法則に基づき，系は Helmholtz の自由エネルギーFが最も急激に減少する方向へと自発的に推移するため，この緩和過程の経路は次式に示す最急降下曲線として求めることができる．

$$\frac{d\lambda^i}{ds}=-\delta_{ij}\frac{\partial F}{\partial\lambda^j} \quad (2)$$

次に情報幾何学的な視点として，統計多様体$\mathcal{M}$上に Wasserstein 情報幾何学を導入する．これは，PDF の形状変化に伴う最小輸送コストを表す Wasserstein 距離を距離とする幾何学である．この Wasserstein 距離から導かれる Otto 計量に基づき，輸送コストを最小化する変形経路として測地線を導出することができる．情報の最短経路である測地線は, Otto 計量から導かれる Levi-Civita 接続Γ_{ij}^kを用いることで，以下の測地線方程式の解として記述される．

$$\frac{d^2\lambda^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{d\lambda^i}{ds}\frac{d\lambda^j}{ds}=0 \quad (3)$$

本研究では，式(3)を始終点を固定する境界値問題として定式化し，有限要素法を用いて数値解析を行う．

３．解析結果

Fig.1 に, パラメータ空間(λ_1,λ_2)における力学的な経路である最急降下曲線と Wasserstein 情報幾何学から得られた測地線を示す．Fig.1 より，力学的な経路と情報の最短経路は，一致しないことが明らかとなった．これは，エラストマーの自然な緩和変形過程が，輸送論的に最も効率の良い変形ではないことを示している．これらの幾何学的な乖離を定量的に評価するため, 力学的な最急降下曲線に対して，易動度L^{ij}と外力f_jを含む以下の式に拡張した．

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

$$\frac{d\lambda^i}{ds} = -L_{ij}\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda^j} - f_j\right) \tag{4}$$

本条件の下で，変形経路全体のエネルギー散逸を最小化する最小散逸経路の方程式を導出すると，測地線方程式と一致した．特に，易動度を Otto 計量の逆行列とすることで，Wasserstein 情報幾何学の測地線を外力付与下における最小散逸経路という物理モデルとして捉えることが可能である．これにより，情報の最短経路を実現するために必要な易動度の分布や外力の定量化が可能となった．これより求まる仮想的な外力は測地線の接線方向と法線方向にそれぞれ分解できる．このとき，仮想的な外力の法線方向成分は，Wasserstein 情報幾何学における測地線の変形経路を維持するために必要な抵抗力として評価することができると考えられる．

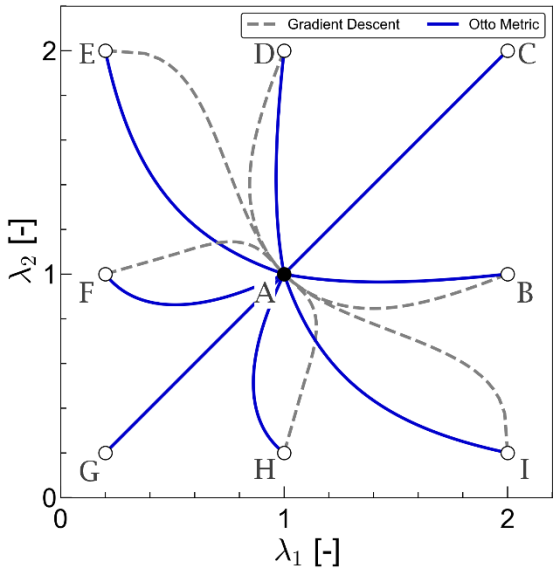


Fig. 1 Relaxation deformation process in deformation parameter space

参考文献

1) Boyce M.C. and Arruda E.M., Constitutive Models of Rubber Elasticity, Rubber Chemistry and Technology, 73(3), 504-523 (2000).
2) Treloar L.R.G., The Physics of Rubber Elasticity, Oxford University Press (1975)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

力学的に等価な結晶欠陥配置の形態解析
Morphological Analysis of Mechanically Equivalent Crystalline Defect Configurations

小林　舜典（大阪大・基礎工）　　垂水　竜一（大阪大・基礎工）
Shunsuke KOBAYASHI, The University of Osaka
Ryuichi TARUMI, The University of Osaka
E-mail: kobayashi.shunsuke.es@osaka-u.ac.jp

Line defects in crystals are classified into translational-type dislocations and rotational-type disclinations. It is known that there exist special configurations in which these two kinds of defects exhibit equivalent elastic fields in their vicinity. To clarify the characteristics of such mechanically equivalent configurations, this study carried out a kinematic analysis using differential geometry. As a result, it was found that for a single wedge disclination, two different edge-dislocation configurations can exist. These two types of edge-dislocation configurations are considered to represent the difference between partial and perfect disclinations.

１．諸言

結晶中の線欠陥は並進・回転対称性の破れに対応する転位と回位に分類することができる．一方，質的に異なるこれらの線欠陥に対して，欠陥近傍の応力・ひずみ場が等しくなる空間配置が存在することが知られている．こうした弾性場が等価となる欠陥配置の代表例として，刃状転位列とくさび型回位対が挙げられる [1]．最近，我々の研究グループでは微分幾何学を基礎とした結晶欠陥の連続体力学理論を用いることで，転位列を回位対へと変換する操作を定義することができ，これを通して両者の弾性場の等価性の起源が，塑性変形の場の等価性にまで遡ることができることを明らかにした [2]．この同一視は，数学的にはアフィン接続と呼ばれる構造を置換する操作に還元される．しかしながら，この変換操作に対する逆操作，すなわち与えられた回位と等価な転位配置がどのような特徴を持つかは明らかにされておらず，これら二種類の欠陥配置の間の同一視がどこまで可能かは不明である．こうした背景を踏まえて，本研究では転位と回位の変換・逆変換を行い，力学的に等価な転位・回位配置の特徴を明らかにすることを目的とする．

２．解析方法

幾何学的な格子欠陥論においては，欠陥を含む結晶の仮想的な塑性変形状態を Riemann–Cartan 多様体$(\mathcal{M}, g, \nabla)$を用いて記述する．これは，内積と平行性を Riemann 計量g，およびアフィン接続∇を用いて一般化した空間である．このとき，格子欠陥の空間分布はアフィン接続∇を用いて定義される捩率 2-形式τ^α, および曲率 2-形式Ω^α_βを用いて表現することができる．特に転位は Weitzenböck 接続∇^W，回位は Levi-Civita 接続∇^Lを用いて表すことができる．これらが存在するとき，Riemann–Cartan 多様体は次式で表される Cartan の第一・第二構造方程式を満足するようにして決定することができる．

$$\tau^\alpha = d\vartheta^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \vartheta^\beta \tag{1}$$

$$\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta \tag{2}$$

ただしϑ^αは$g = \delta_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta$を満足する Riemann–Cartan 多様体の正規直交基底であり，ω^α_γはアフィン接続に関する接続 1-形式である．特に，Weitzenböck 接続では$\omega^\alpha_\beta = 0$とおくことができる．

これらの方程式に対して，転位のみが存在する条件$(\tau^\alpha \neq 0)$の下で式(1)を解き，これによって得られた Riemann 計量gから Levi–Civita 接続の接続 1-形式ω^α_βを決め，式(2)に代入することで与えられた転位τ^αに対応する回位の空間分布を決定することができる．通常，物体に発生するひずみ・応力場は Riemann 計量gにのみ依存することから，この接続の置換操作の過程では弾性場は不変に保たれる．したがって，この操作によって等価な弾性場を持つ転位と回位の対を算出することができる．また，これと逆の置換操作として，はじめに回位の空間分布を与え，そこで得られた正規直交基底ϑ^αおよび Weitzenböck 接続の接続係数$\omega^\alpha_\beta = 0$を式(1)に代入することで，与えられた回位に対応して等価な転位配置を算出することができる．

３．解析結果と考察

等間隔で並ぶ転位列を表す捩率 2-形式は$\tau^2 = \Omega\delta(y)H(x)$と表すことができる．ただし，$\Omega$は転位列に沿った単位長さあたりの Burgers ベクトルの大きさであり，δは Dirac デルタ，Hは Heaviside 関数である．順方向の接続の変換によりこれに対応するくさび回位は$\Omega^1_2 = \Omega\delta(x)\delta(y)$と表すことができる．これは，転位列の終端部$(x, y) = (0,0)$にくさび回位が局在化する様子を表している [2]．次に$\Omega^1_2 = \Omega\delta(x)\delta(y)$のくさび回位に対して式(1)–(2)を解くと，Levi-Civita 接続の接続 1-形式は$\omega^1_2 = \frac{\Omega}{2\pi r^2}(-ydx + xdy)$となる．これを用いて式(1)を解くと$(\vartheta^1, \vartheta^2) = (dx, dy) + \omega^1_2(-y, x)$となる．これに対して Weizenböck 接続の下で式(1)に代入すると，捩率 2 形式は次式ように表すことができる．

$$\tau^1 = \frac{-\Omega y}{2\pi r^2} dx \wedge dy \tag{3}$$

$$\tau^2 = \frac{\Omega x}{2\pi r^2} dx \wedge dy \tag{4}$$

上式は，周方向に Burgers ベクトルをもつ刃状転位の連続分布を表しており，刃状転位列とは異なる配置を示している．したがって，くさび回位には，力学的に等価な刃状転位配置が少なくとも二種類存在すると考えられる．

ここで得られた二種類の刃状転位配置は，解析領域のトポロジーに依存して決定されたものと考えられる．第一・第二の例では，それぞれ初期に与えた欠陥配置に対応して，それぞれ$x = 0, y > 0$の半直線，$(x, y) = (0,0)$の原点に特異点が存在する．特に式(3)–(4)で得られた転位配置は初期に与えたくさび回位と同一の特異点を有しており，初期配置の特異点が転位配置に影響していることを示唆している．また，トポロジーの異なる二種類の結果は，不完全・完全くさび回位の区別が可能であることを示唆している．

参考文献

1) L.C.M. Li, Surface Science, 31, pp. 1226 (1972).
2) S. Kobayashi, K. Takemasa and R. Tarumi, Royal Society Open Science, 12, 242213 (2025).

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-09：減衰性能と振動特性の評価）

2026年5月16日(土) 15:00 ~ 16:00 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-09 (1)

座長:中村 尚弘(関西学院大学)

15:00 ~ 15:15

[16011] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その1　アンケート概要および耐震構造に関する結果

*犬伏 徹志[1]、佐武 直紀、近藤 貴士[2]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 近畿大学、2. 大和ハウス工業、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:15 ~ 15:30

[16012] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査 その2　制振構造に関する結果

*伊藤 真二[1]、犬伏 徹志[2]、佐武 直紀、近藤 貴士[1]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 大和ハウス工業、2. 近畿大学、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:30 ~ 15:45

[16013] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その3　免震構造に関する結果

*佐武 直紀、犬伏 徹志[1]、近藤 貴士[2]、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 近畿大学、2. 大和ハウス工業、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

15:45 ~ 16:00

[16014] 建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査　その４　床振動の検討に関する結果

*近藤 貴士[1]、西井 康真[1]、犬伏 徹志[2]、佐武 直紀、中村 尚弘[3]、宮津 裕次[4]、池田 周英[5] (1. 大和ハウス工業、2. 近畿大学、3. 関西学院大学、4. 東京理科大学、5. 竹中工務店)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査
その 1　アンケート概要および耐震構造に関する結果

Questionnaire Survey on Internal Viscous Damping Modeling in Building Structural Design
Part 1: Survey Outline and Results for Seismic-resistant Structures

犬伏　徹志（近畿大・建築）　佐武　直紀（フリーランス）　近藤　貴士（大和ハウス工業）
中村　尚弘（関西学院大・建築）　宮津　裕次（東京理科大・創域理工）　池田　周英（竹中工務店）
Tetsushi INUBUSHI, Kindai University
Naoki SATAKE, Freelance
Takahito KONDO, Daiwa House Industry
Naohiro NAKAMURA, Kwansei Gakuin University
Yuji MIYAZU, Tokyo University of Science
Shuei IKEDA, Takenaka corporation
E-mail: inubushi@arch.kindai.ac.jp

This paper outlines a questionnaire survey on damping settings in structural design. Dynamic analysis was widely conducted for seismic-resistant structures, even for buildings under 60 m. For horizontal damping, tangent stiffness proportional models predominated in RC structures, while initial stiffness proportional models predominated in S structures. The first-mode damping ratio was 3% in RC and 2% in S structures. Vertical damping ratios were similar, and designers emphasized the need for rational, objectively justified models.

1．はじめに

日本建築学会の「建築物の減衰機構とその性能評価小委員会」では，これまでに得られた建築物の減衰に関する知見を収集・整理し，書籍「建築物の減衰と振動」[1]を出版した．しかし，建築物における減衰の発生メカニズムが未だ不明確であること，各種観測記録を分析して得られた減衰定数に大きなばらつきがあること，などの課題がある．一方で，動的解析では減衰の設定により建築物の応答性状は大きく変化する．このような課題があるため，設計においては減衰について慎重な設定が求められる．

そこで，実務設計者を対象にアンケートを実施し，構造設計で用いた減衰モデルや減衰定数などについて調査を行った．本稿ではアンケート概要と耐震構造に関する調査結果について述べる．

2．アンケート調査の概要

本アンケートは(一社)日本建築構造技術者協会(JSCA)に協力頂いた．2024 年 7 月上旬に JSCA を通じて案内し，オンライン形式で実施した．アンケートは無記名方式とし，時刻歴応答解析を用いて設計された耐震構造，制振構造，免震構造，さらに居住性に関連する床振動を対象とした．

アンケートでは，設計で用いた解析モデル，減衰モデル，減衰定数などを主に選択式で回答し，さらに実務設計における減衰の設定に関する疑問や課題などについて自由記述で回答する形式とした．なお，耐震構造と制振構造は同じ質問で，免震構造については，上記に加えて免震層に関する質問を追加している．床振動についてはその 4 に概要を示す．

3．耐震構造に関するアンケート結果

1）建物概要

Fig.1 に建物概要を示す．有効回答数は 34 件である．建物用途は事務所が全体の 38%で最も多く，次いで集合住宅が 29%となっている．数は少ないが，ホテル，倉庫，病院なども見られる．建物高さは 60m 以下が約半数を占めており，100m 以下の建物が全体の 88%を占めている．構造種別は RC 造が全体の 41%, S 造が 35%となっている．RC 造，SRC 造 ，PC 造， PRC 造を RC 系，S 造, CFT 造を S 系とすると，両者はほぼ同数となっている．

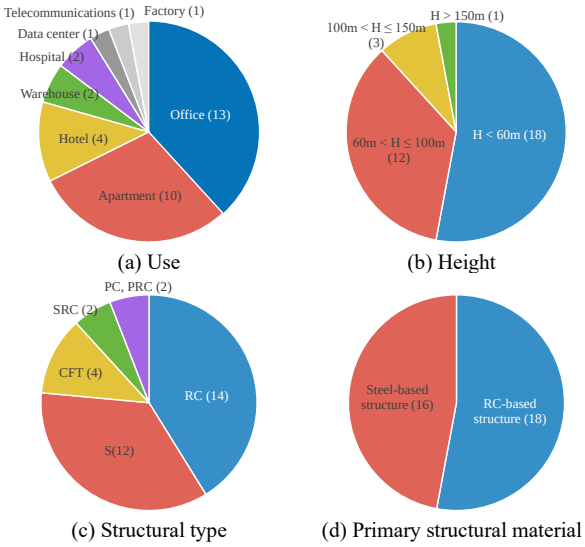


Fig.1 Building overview (seismic-resistant structure)

2）RC 系耐震建物に用いた減衰モデル・減衰定数

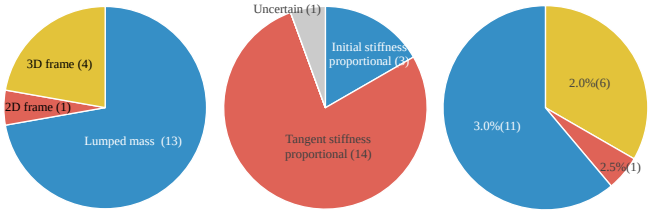
a）水平方向

Fig.2 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは質点系モデルが全体の約 75%を，減衰モデルは瞬間剛性比例型が約 80%を占めている．回答した減衰モデルを用いた理由として，過去に設計した建物との連続性，一般的に用いられているため，1 次モードが支配的であるため，などの回答があった．h_1 は 3%が過半数を占めているが，それより小さい値を採用した事例も見られ，これらの多くは SRC 造，PC 造，PRC 造であった．

b）鉛直方向

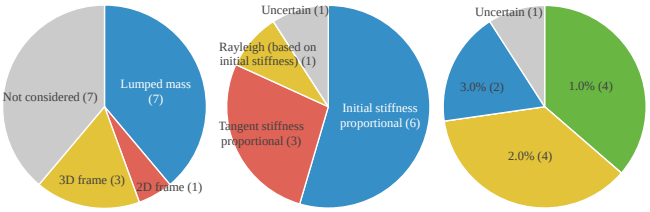
Fig.3 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．鉛直方向では解析を実施していないケースが多く，水平方向同様に質点系の採用数が最も多いが，平面や立体フレームモデルの採用数は水平方向とほぼ同じである．水平方向の検討

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会



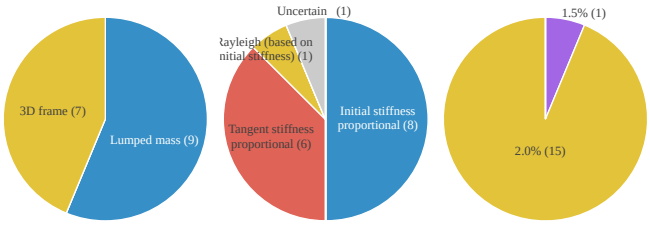
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.2 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: horizontal direction)



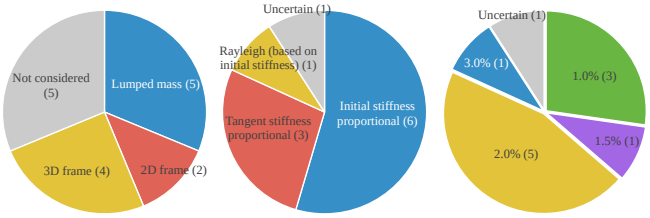
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.3 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: vertical direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.4 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: horizontal direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.5 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: vertical direction)

では質点系モデルを用いているが，鉛直方向の検討では平面や立体フレームモデルを用いた事例も見られる．減衰モデルは初期剛性比例型が最も多く，鉛直方向は弾性状態と考えて設計を行っているためと考えられる．また，1 件のみだがレーリー型も採用されている．h_1 は水平方向に比べて 1%程度低い値を採用している事例が多い．一般的には水平方向に比べて鉛直方向の応答振幅は小さいため，減衰定数の振幅依存性を意識しての対応と思われる．

3）S 系耐震建物に用いた減衰モデル・減衰定数

a) 水平方向

Fig.4 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは質点系モデルと立体フレームモデルが同程度で，減衰モデルは初期剛性比例型が半数を占めている．回答した減衰モデルを用いた理由としては RC 系と同様であった．なお，1 件のみだがレーリー型も採用され，立体フレームモデルと組み合わせて使用されていた．h_1 はほとんどが 2%であった．

b) 鉛直方向

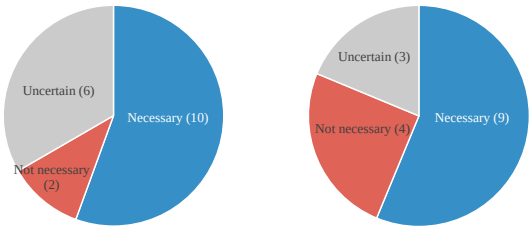
Fig.5 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．RC 系と同様，鉛直方向の解析を実施していないケースが多いが，一方で平面や立体フレームモデルを採用した事例が比較的多く見られる．なお，S 造では水平方向と鉛直方向で同じ種類の解析モデルを用いる傾向が見られ，初期剛性比例型が最も多く採用されている．h_1 は基本的には水平方向と同じか，それより低い値を用いる傾向が見られる．

4）減衰の設定等について感じた疑問や課題

耐震構造建物における減衰定数やその設定に関する意見として主要なものを以下に挙げる．

【減衰定数について】

- 減衰定数の値やそのばらつきが不明確であるため，既往の実績値（RC 造 3%，S 造 2%）を用いている．
- 構造規模や形態などにより減衰定数の値が異なる要因を分析し，より適切な値を示してほしい．
- 地盤との動的相互作用の扱いと合わせて考えるべき．



(a) RC-based structure (b) Steel-based structure

Fig.6 Necessity of considering aging effects

- 今のやり方で実質的に問題なければ今の値でよい．

【減衰の設定について】

- 地盤減衰系を簡単に考慮できる方法があるとよい．
- 振幅依存性まで考慮できる合理的な減衰モデルが必要．
- 工学的に説明できないので，きちんとした指針がほしい．
- 1%の設定差で応答がかなり変わることもあるので、妥当性については疑問に感じる。
- 減衰の適正な設定は困難なので制振構造を採用すべき
- モニタリングを義務化してデータ収集すべき．

Fig.6 に，設計の段階において建築物の経年変化を考慮すべきかの質問に対する回答結果を示す．RC 系，S 系ともに，半数以上が経年変化を考慮した方が良いと考えており，設計者の関心の高さがうかがえる．自由記述で寄せられた主要な意見を以下に示す．

- ひび割れ等による剛性変化の影響は考慮した方がよい．
- 大地震後の振動特性の変化（固有周期の変化など）を考慮した耐震安全性も評価すべき．
- 新築時と 100 年後の振動特性の差異を知りたい．(適切なメンテナンスを行えば新築時と同等か？)

4．まとめ

本稿では実務設計者を対象に実施した，構造設計で用いた解析モデル，減衰モデル，減衰定数などのアンケート調査概要および耐震構造に関する調査結果を示した。

参考文献

1) 日本建築学会：建築物の減衰と振動，2020.12

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査 その 2　制振構造に関する結果

Questionnaire Survey on Internal Viscous Damping Modeling in Building Structural Design Part 2: Survey Outline and Results for Seismic Vibration Control Structures

伊藤　真二（大和ハウス工業）　犬伏　徹志（近畿大・建築）　佐武　直紀（フリーランス）
近藤　貴士（大和ハウス工業）　中村　尚弘（関西学院大・建築）　宮津　裕次（東京理科大・創域理工）
池田　周英（竹中工務店）
Shinji ITO, Daiwa House Industry
Tetsushi INUBUSHI, Kindai University
Naoki SATAKE, Freelance
Takahito KONDO, Daiwa House Industry
Naohiro NAKAMURA, Kwansei Gakuin University
Yuji MIYAZU, Tokyo University of Science
Shuei IKEDA, Takenaka Corporation
E-mail: ito-shinji@daiwahouse.jp

A questionnaire survey examined damping models and ratios used in the design of seismic vibration control structures. For horizontal damping, tangent stiffness proportional model predominated in RC structures, while initial stiffness proportional model predominated in S structures. The first-mode damping ratio was generally 3% in RC and 2% in S structures. Vertical trends were similar but slightly smaller. Designers requested improved models and clearer theory, and views on aging effects differed between RC and S structures.

1．はじめに

その 1 では，実務設計者を対象に実施した，構造設計で用いた減衰モデルや 1 次減衰定数などについてのアンケート概要と耐震構造に関する調査結果について述べた．本稿その 2 では，制振構造に関する調査結果について述べる．

2．制振構造に関するアンケート結果

1）建物概要

Fig.1 に建物概要を示す．有効回答数は 25 件で，耐震構造に比べてやや少ない．建物用途は事務所が全体の 48%で最も多く，次いで集合住宅が 28%となっている．60m 超～100m 以下と 100m 超～150m 以下を合わせて 88%となっており，超高層建物に制振構造が多く採用されていることがわかる．構造種別は S 造が全体の 40%，RC 造と CFT 造がともに 28%となっている．RC 造，SRC 造を RC 系，S 造，CFT 造を S 系とすると，RC 系が 32%、S 系が 68%となっている．

2）RC 系制振建物に用いた減衰モデル・減衰定数

a) 水平方向

Fig.2 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは質点系モデルが多いが，立体フレームモデルも比較的多く用いられている．減衰モデルは瞬間剛性比例型が 75%を占めている．減衰モデルを用いた理由として，一般的に用いられているため，との回答が多かった．なお，採用した h_1 の値はすべて 3%であった．

b) 鉛直方向

Fig.3 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは，質点系モデルと立体フレームモデルの採用割合が水平方向とほぼ同じである．減衰モデルは初期剛性比例型が最も多くなっており，これは鉛直方向では弾性状態を想定しているためと考えられる．h_1 は水平方向と同じ値を採用している事例がほとんどであり，回答数は少ないものの，耐震構造（水平方向に対して鉛直方向の h_1 が 1%程度低い値を採用する事例が多い）とは異なる傾向となっている．

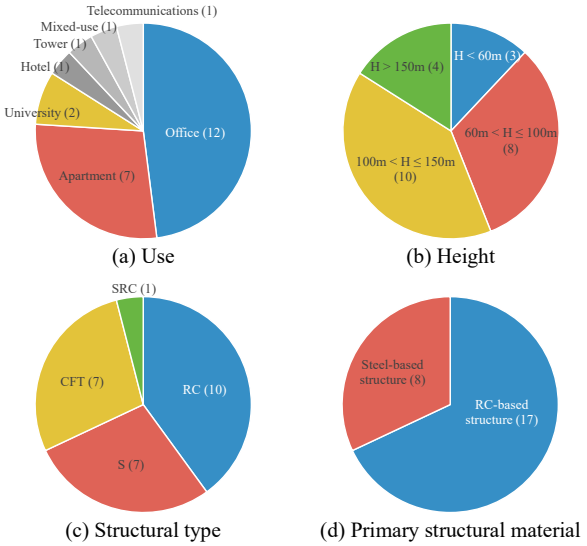


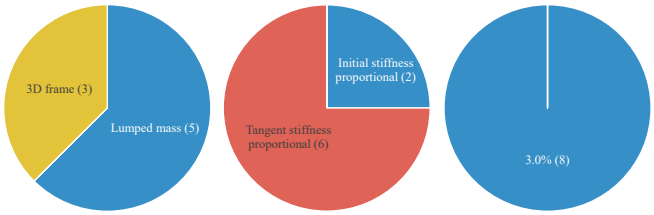
Fig.1 Building overview (seismic vibration control structures)

3）S 系制振建物に用いた減衰モデル・減衰定数

a) 水平方向

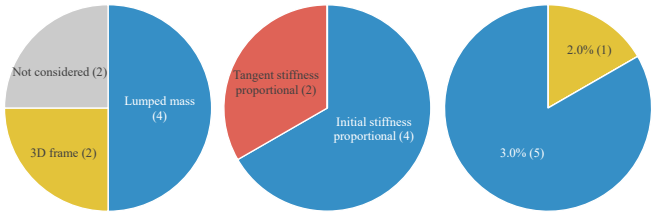
Fig.4 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは RC 系の傾向とは異なり，立体フレームモデルが多く用いられている．これは周辺架構剛性を考慮してダンパーのエネルギー吸収量をより詳細に評価するためと考えられる．減衰モデルは初期剛性比例型が 59%で過半数を占めており，瞬間剛性比例型も比較的多く用いられている．回答した減衰モデルを用いた理由として，過去に設計した建物との連続性，一般的に用いられているため，との回答が多かった．また，超高層建物で高次モードの影響を考慮するためにレーリー減衰を用いた，との回答もあり，減衰モデルの特徴を適切に理解して設計を行っていることがわかる．一方，他の減衰モデルでも検討を行ったが事業計画が

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会



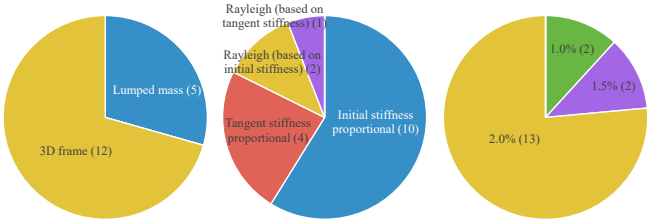
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.2 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: horizontal direction)



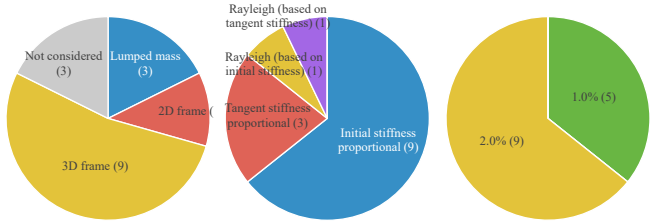
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.3 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: vertical direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.4 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: horizontal direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.5 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: vertical direction)

変わりそうだったため，との回答もあり，安全性と経済性の両立に苦心している様子もうかがえる．採用した h_1 の値はほとんどが 2%であった．

b) 鉛直方向

Fig.5 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．RC 系に比べて解析を実施していないケースは少なく，水平方向同様，立体フレームモデルが多く用いられている．これは 1 つの解析モデルで水平・鉛直両方向の検討を行っているためと考えられる．減衰モデルは初期剛性比例型が最も多い．この減衰モデルを用いた理由として，水平方向と同様の回答が多かったが，1 次固有周期が十分に短く高次モードの影響は小さいと考えたため，との回答もあった．h_1 は水平方向と同じか，それより低い値を用いる傾向が見られる．

4) 固有周期の計算方法

Fig.6 に減衰の設定に用いる固有周期の計算方法を示す．すべての事例で実固有値解析が用いられており，ダンパーを除いた架構に対して剛性マトリクスを作成しているケースが過半数を占めている．

5) 減衰の設定等について感じた疑問や課題

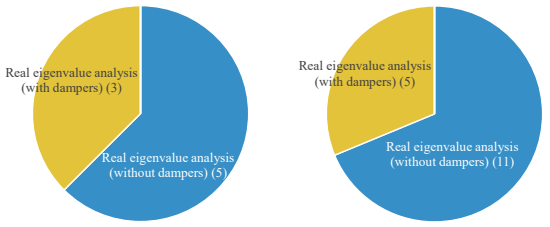
制振構造建物における減衰定数やその設定に関する意見として主要なものを以下に挙げる．

【減衰定数について】

- ばらつきが大きい理由を解明し，減衰定数設定方法の確立を目指すべき．
- 動的相互作用による減衰効果を明らかにしたうえで，建物自体の減衰定数を考えるべき．
- 建物の重要度や応答の敏感性などを加味して設計者判断が必要な項目と考えられる．
- 設計では安全側のみを考慮することは非経済的であり，従来の設定値との整合性が必要．
- 外力と減衰はセットで考える必要があり，どちらかだけを厳密にする意味はあまり感じない．

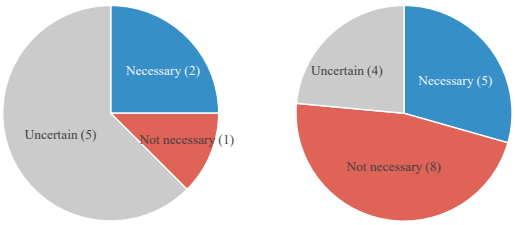
【減衰の設定について】

- 入力地震動と建物への入力（地盤と建物との動的相互作用）部分での不明瞭さの解明が必要．
- 振幅依存性や非構造部材の影響の評価．



(a) RC-based structure (b) Steel-based structure

Fig.6 Calculation method for natural periods



(a) RC-based structure (b) Steel-based structure

Fig.7 Necessity of considering aging effects

- 設計と実際に乖離があることが指摘されていても，相場観でよく分からずに設計をしている．
- 研究による減衰定数の明快な理論的説明．
- 超高層建物の地震被害・応答比較データの収集．
- 適切な減衰モデルの開発．

Fig.7 に，設計の段階において建築物の経年変化を考慮すべきかの質問に対する回答結果を示す．RC 系では「わからない」の回答が多く，S 系では経年変化を考慮しなくても良いと考えている割合が多い．これは，制振構造で大地震において建物損傷が小さいためと考えられる．なお，自由記述において，「複数回地震の想定．BCP に関係するが，現状は根拠が乏しいので設計として採用しにくい．」との意見があった．

3．まとめ

本稿では実務設計者を対象に実施した，制振構造の設計で用いた解析モデル，減衰モデル，減衰定数などについてのアンケート調査結果を示した。

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査 その 3　免震構造に関する結果

Questionnaire Survey on Internal Viscous Damping Modeling in Building Structural Design Part 3: Survey Outline and Results for Seismically Base-Isolated Structures

佐武　直紀（フリーランス）　犬伏　徹志（近畿大・建築）　近藤　貴士（大和ハウス工業）
中村　尚弘（関西学院大・建築）　宮津　裕次（東京理科大・創域理工）　池田　周英（竹中工務店）
Naoki SATAKE, Freelance
Tetsushi INUBUSHI, Kindai University
Takahito KONDO, Daiwa House Industry
Naohiro NAKAMURA, Kwansei Gakuin University
Yuji MIYAZU, Tokyo University of Science
Shuei IKEDA, Takenaka Corporation
E-mail: nsatake2@gmail.com

A questionnaire survey examined damping models and ratios used in the design of base-isolated structures. For horizontal damping, tangent stiffness proportional model predominated in RC structures, while tangent and initial stiffness proportional models were adopted in similar proportions in S structures. The first-mode damping ratio was generally 2%, with 1% also common in S structures. Vertical trends were similar, and internal viscous damping of isolation layer was rarely considered. Most respondents regarded aging effects as unnecessary.

１．はじめに

その 2 では，実務設計者を対象に実施した制振構造に関するアンケート調査結果について述べた. 本稿その 3 では，免震構造に関する調査結果について述べる．

２．免震構造に関するアンケート結果

1）建物概要

Fig.1 に建物概要を示す．有効回答数は 38 件である．建物用途は事務所が全体の 34%で最も多く，次いで集合住宅が 29%，病院が 16%となっている．建物高さは 60m 以下が 69%で，100m 以下の建物が全体の 87%を占めている。構造種別は RC 造が全体の 50%，S 造が 37%となっている．RC 造，SRC 造を RC 系，S 造，CFT 造を S 系とすると，RC 系が 55%、S 系が 39%となっている（それ以外は RC と S の混構造）．

2）RC 系免震建物に用いた減衰モデル・減衰定数

a) 水平方向

Fig.2 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは質点系モデルが、減衰モデルは瞬間剛性比例型が大多数を占めている。回答した減衰モデルを用いた理由として、過去に設計した建物との連続性、RC 造では一般的に用いられているため、などの回答があった。採用した h_1 の値はすべて 2%が過半数を占めている．耐震構造では 3%が多かったが，免震構造ではそれよりも低い h_1 を使用する傾向が見られる。

b) 鉛直方向

Fig.3 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．他の構造形式に比べて解析を実施しているケースが多く，免震部材の面圧や鉛直ひずみを確認するためと考えられる．解析モデルは水平方向同様に質点系の採用数が最も多いが，平面や立体フレームモデルの採用数が水平方向よりも多い．アンケートでは詳細には尋ねていないが，上部構造は質点系で免震層のみ平面的な広がりを有するモデルを用いていることが考えられる．減衰モデルは瞬間剛性比例型が最も多いが，初期剛性比例型やレーリー型も比較的多く用いられており，レーリー型は平面や立体フレームモデルと組み合わせて用いられていた. 減衰モデルを用いた理由として，剛性比例型では，過去に設計した建物との連続性，RC 造では一般的に用いられているため，などの回答があった一方，レーリー型では，減衰を過大評価しないため，水平動と上下動を同時入力したため，などの回答があった．採用した h_1 の値は 2%以下が過半数を占めている．

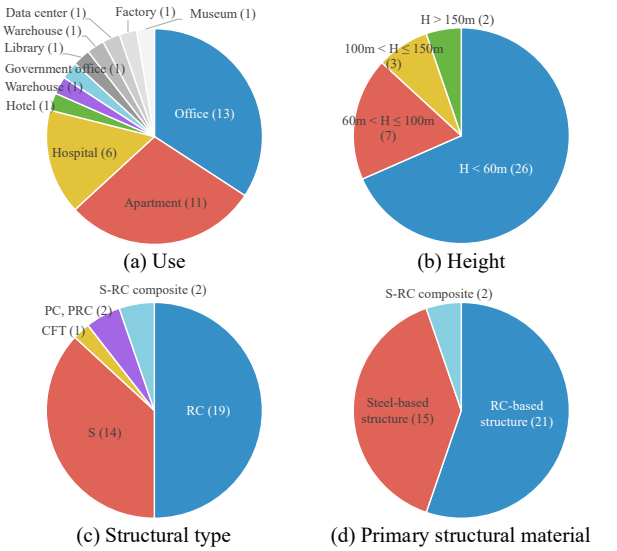


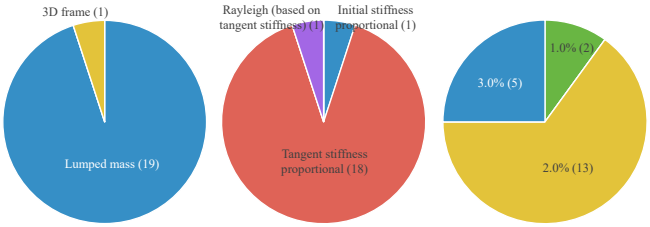
Fig.1 Building overview (seismically base-isolated structures)

3）S 系免震建物に用いた減衰モデル・減衰定数

a) 水平方向

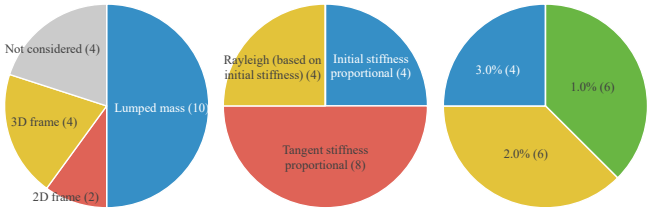
Fig.4 に水平方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．解析モデルは質点系モデルが最も多く、減衰モデルは初期剛性比例型と瞬間剛性比例型が概ね同じ割合である。減衰モデルを用いた理由として、過去に設計した建物との連続性、S 造では一般的であるから、などの回答があった．採用した h_1 の値は 2%が過半数を占めているが、1%の採用数も多い。すなわち、S 系では耐震構造と同じか低い h_1 を使用する傾向が見られる。

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会



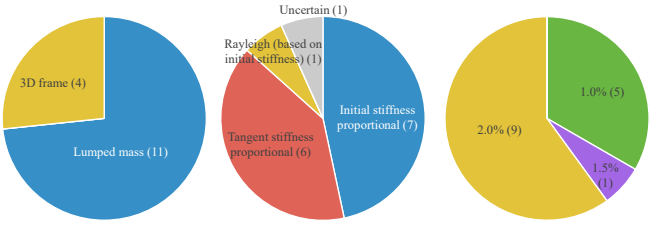
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.2 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: horizontal direction)



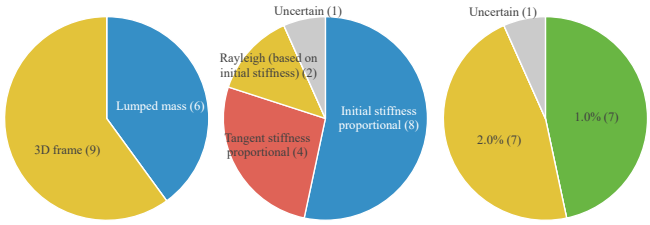
(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.3 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (RC-based structure: vertical direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

Fig.4 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: horizontal direction)



(a) Analytical model (b) Damping model (c) Damping ratio

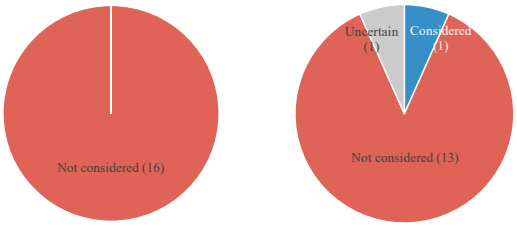
Fig.5 Analytical model, damping model, 1st mode damping ratio (Steel-based structure: vertical direction)

b) 鉛直方向

Fig.5 に鉛直方向の時刻歴応答解析（レベル 2）に用いた解析モデル，減衰モデル，1 次減衰定数 h_1 を示す．すべての事例で時刻歴応答解析を実施しており，解析モデルは質点系に比べて，立体フレームモデルが多く用いられている．これは RC 系同様，上部構造は質点系で免震層のみ平面的な広がりを有するモデルを用いていることが考えられる．減衰モデルは初期剛性比例型が最も多く，次いで瞬間剛性比例型が多い．レーリー型は RC 系に比べるとやや少ない．減衰モデルを用いた理由として，剛性比例型では，過去に設計した建物との連続性などの回答があった一方，レーリー型では，減衰を過大評価しないため，との回答があった．採用した h_1 は水平方向と同じか低い値を用いる傾向が見られる．

4) 免震層の減衰の考慮

Fig.6 に鉛直方向の検討において免震層に内部粘性減衰を考慮したかどうかの結果を示す．いずれもほぼすべての建物で免震層の内部粘性減衰は考慮していない．すなわち鉛直方向では上部構造の減衰のみを期待して設計を行っていることがわかる．



(a) RC-based structure (b) Steel-based structure

Fig.6 Internal viscous damping in the isolation layer

5) 減衰の設定等について感じた疑問や課題

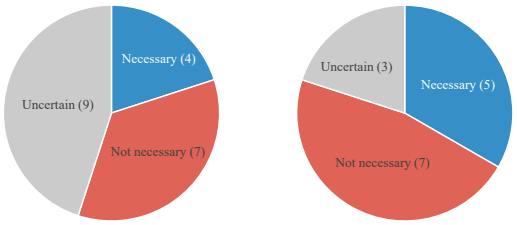
免震構造建物における減衰定数やその設定に関する意見として主要なものを以下に挙げる．

【減衰定数について】

- 応答変位が小さいため RC でも 2%を採用した．
- 小さい値が望ましいとしてもコストに影響するため簡単に採用はできない．
- 免震構造や制振構造の場合は大きな影響はないと考える．
- 鉛直方向についてはほとんど知見がない．

【減衰の設定について】

- 構造形式や架構の特徴に応じて減衰定数を低減するなどの対応が必要．
- 適切な値やモデル化の設定が難しく，エビデンスに基づいた適切な設定のための指針類があると有意義．
- 研究による減衰定数の明快な理論的説明．
- 多くの観測記録に基づく妥当な減衰定数の提示．
- 合理的な減衰モデルの開発．



(a) RC-based structure (b) Steel-based structure

Fig.7 Necessity of considering aging effects

Fig.7 に，設計の段階において建築物の経年変化を考慮すべきかの質問に対する回答結果を示す．RC 系では「わからない」の回答が多く，S 系では経年変化を考慮しなくても良いと考えている割合が多い．この傾向は制振構造と同様で，大地震において建物損傷が小さいためと考えられる．なお，自由記述で寄せられた主要な意見を以下に示す．

- ひび割れ等により建物剛性が低下した場合の検討が必要．
- 複数の地震を繋げた地震動を用いて時刻歴応答解析を行う方法等が考えられるが，適切な検討方法や評価方法についての指針類があると有意義．
- 長期，超長期の場合に繰り返し載荷や経年変化を考慮して耐力の割り増しを行うべき．

3．まとめ

本稿では実務設計者を対象に実施した，免震構造の設計で用いた解析モデル，減衰モデル，減衰定数などについてのアンケート調査結果を示した。

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

建築物の構造設計における内部粘性減衰の設定に関するアンケート調査 その４　床振動の検討に関する結果

Questionnaire Survey on Internal Viscous Damping Modeling in Building Structural Design Part 4: Results for Study on Floor vibrations

近藤　貴士（大和ハウス工業）　西井　康真（大和ハウス工業）　犬伏　徹志（近畿大・建築）　佐武　直紀（フリーランス）
中村　尚弘（関西学院大・建築）　宮津　裕次（東京理科大・創域理工）池田　周英（竹中工務店）
Takahito KONDO, Daiwa House Industry
Yasuma NISHII, Daiwa House Industry
Tetsushi INUBUSHI, Kindai University
Naoki SATAKE, Freelance
Naohiro NAKAMURA, Kwansei Gakuin University
Yuji MIYAZU, Tokyo University of Science
Shuei IKEDA, Takenaka Corporation
E-mail: taka_kondo@daiwahouse.jp

This paper reports a questionnaire survey on damping models and damping ratios used in the study on floor vibrations. The most common damping model used was the stiffness-proportional type, followed by Rayleigh-type and modal damping, which were also relatively frequent. The majority of the primary damping ratio was 2.0% or less. Compared to actual measurement data, there was a tendency to set lower damping constants in the design phase.

１．はじめに

その 1～3 では，実務設計者を対象に実施した建築物の構造設計における減衰の設定に関するアンケート概要と耐震構造，制振構造および免震構造に関する調査結果について述べた．本稿その 4 では，居住性に関する床振動の検討に対する調査結果について述べる．

２．調査項目および回答形式

調査項目および回答形式を以下に示す．

・主要構造部の構造種別（選択式）
・床版種別（選択式）
・長辺スパン長（自由記述，数値を入力）
・対象床の用途（選択式）
・想定する振動源（選択式，複数回答可）
・評価基準とその理由（選択式・記述式）
・振動解析モデルの種類（選択式，複数回答可）
・解析モデルの固有振動数（自由記述，数値を入力）
・解析に用いた減衰モデルとその理由（選択式・記述式）
・1 次減衰定数とその理由（選択式・記述式）
・（高次モードの減衰定数を設定している場合）次数および減衰定数とその理由（自由記述）

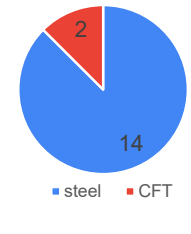
３．調査結果

1）　建物概要

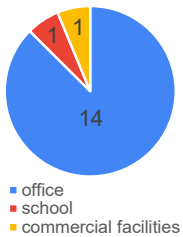
有効回答数は 16 件であった．Fig.1 に建物概要を示す．(a)は構造種別，(b)は床用途の内訳で，ほとんどが鉄骨造の事務所である．(c)は床版種別の内訳で，合成スラブが全体の 69% (11 件)と多数を占めている．(d) は長辺スパン長の内訳で 10～25m に多く分布し，全体の 69%を占めている．

2）　想定振動源と評価指標

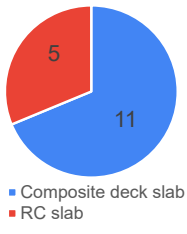
Fig.2 に想定した振動源の内訳を示す．本質問項目は複数回答可としていたが，ほとんどが歩行など人間活動を対象とした内部振動源に限定されている．また．Fig.3 に評価基準の内訳を示す．ほとんどが本会の最新の居住性能評価規準 [1]を参照していることがわかる．なお，この評価基準を用いた理由としては，構造設計業界の標準である，建物スペックとして評価しやすい，以前から用いているため施主からの要望，などの回答があった．



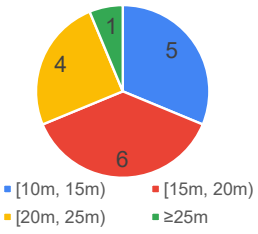
(a) Structural type



(b) Use



(c) Deck type



(d) Long side span

Fig.1 Building Overview

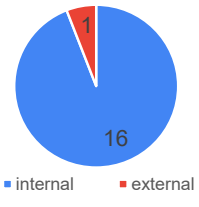


Fig.2 Vibration source

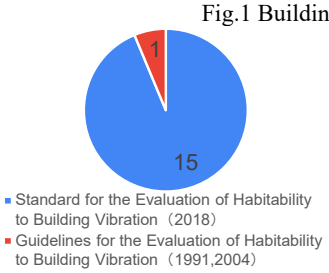


Fig.3 Evaluation indicators

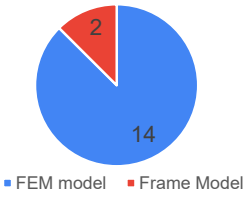


Fig.4 Analysis model type

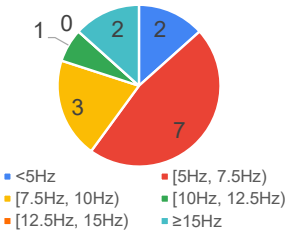


Fig.5 Natural frequency

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

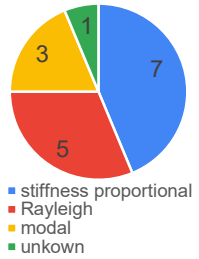


Fig.6 Damping model

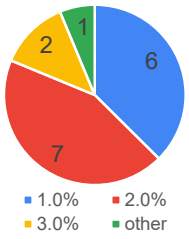
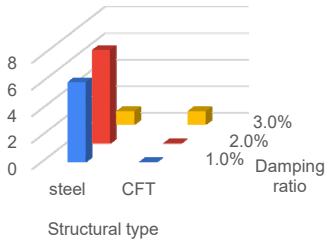
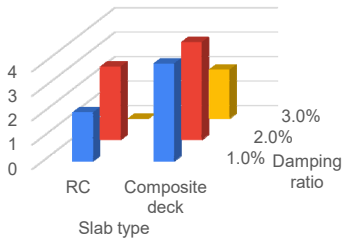


Fig.7 Damping ratio



(a)Structual type



(b)Slab type

3) 減衰モデルおよび減衰定数

Fig.4 に解析モデルを，Fig.5 に固有振動数を示す．FEM モデルが大多数を占めており，固有振動数は 10Hz 未満が全体の 80%を占めている．また，Fig.6 に減衰モデルを示す。剛性比例型が 44% (7 件)で最も多く，レーリー型（31% (5 件)）やモード減衰（19% (3 件)）も比較的多い．減衰モデルの採用理由として，剛性比例型は一般的であること，過去の事例との連続性，社内基準による，などの回答があった．また，レーリー型では過去の解析と計測値の比較結果から判断した，との回答があり，モード減衰では周波数領域で減衰定数を一定にしたいため，などの回答があった．Fig.7 に採用した 1 次減衰定数 h_1 の内訳を示す．h_1=1.0%と h_1=2.0%の割合が概ね同じで，これらが全体の 81%を占めている．減衰定数の採用理由として以下の回答があった．

【h_1=1.0%】微振動領域のため／過去の類似案件より
【h_1=2.0%】一般的であるため／実測に基づく社内基準
過去案件より（解析/計測値/設計案件）
【h_1=3.0%】実測結果より／参考文献より
【その他】 床と架構で減衰定数が異なる社内知見あり

4) 各種パラメータと減衰定数の関係

Fig.8 に建物概要（構造種別，床の用途，床版種類，長辺スパン長）および解析モデルの固有振動数における設定した 1 次減衰定数 h_1 の分布を示す．件数が少ないこともあり，各パラメータと 1 次減衰定数 h_1 に明瞭な関係は確認できない．また，今回のアンケート結果で大多数を占める鉄骨造を対象に，固有振動数および長辺スパンと減衰定数の関係を実測データ [2]と比較した結果を Fig.9 に示す．実測データに比べ，設計では減衰定数を低く設定している傾向がある．

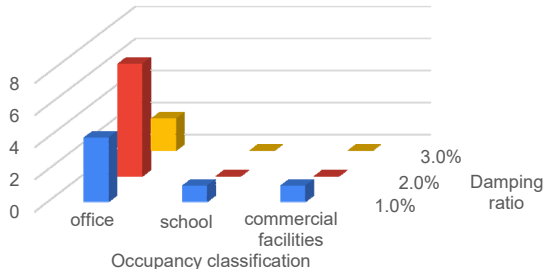
4．まとめ

本稿では実務設計者に実施した居住性に関する床振動の検討における減衰の設定に関するアンケート結果を示した．

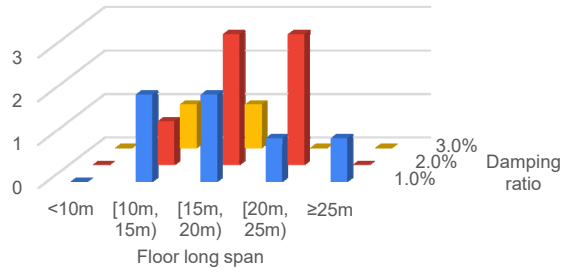
- 鉄骨造で合成スラブを用いた事務所用途の床の検討が多く，長辺スパン長は 10～25m に多く分布していた．
- 解析モデルは FEM モデルが多く，振動源は歩行等の人間活動を想定したケースが多い．評価指標は本会の居住性能評価規準を用いていた．
- 減衰モデルは剛性比例型が最多で，レーリー型やモード減衰も比較的多い．また，1 次減衰定数は 2.0%以下が大多数を占めていた．これらの設定理由は，過去の解析事例や実測データ，または独自の社内基準に基づくものなどであった．
- 構造種別，床の用途，床版種類と 1 次減衰定数に明瞭な関係は確認できない．一方，実測データと比較すると，設計では減衰定数を低く設定している傾向があった．

参考文献

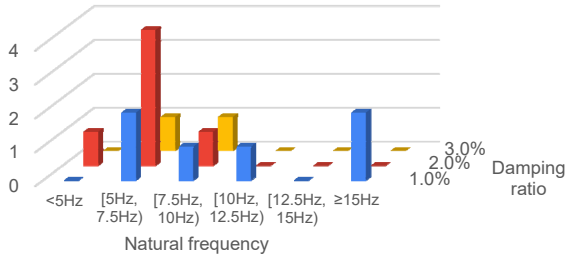
1) 日本建築学会: 建築物の振動に関する居住性能評価規準・同解説, AIJES-V0001-2018, 2018.
2) 日本建築学会: 建築物の減衰と振動, 2020.



(c)Use

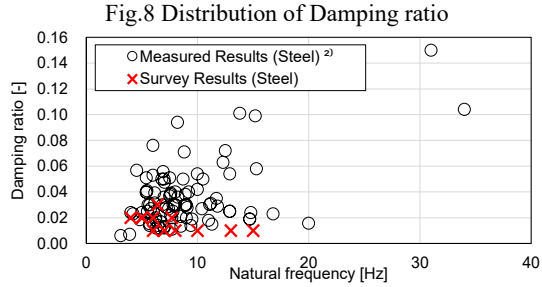


(d)Floor long span

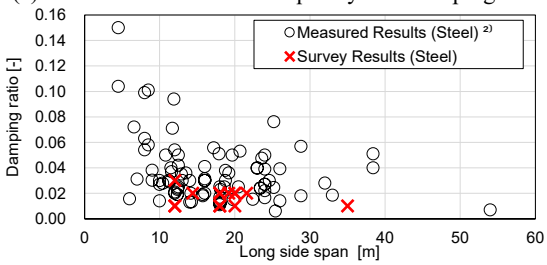


(e)Natural frequency

Fig.8 Distribution of Damping ratio



(a) Correlation of Natural frequency and Damping ratio



(b) Correlation of Long side span and Damping ratio

Fig.9 Comparison of measured results and survey results

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

特別セッション | 特別セッション（OS-09：減衰性能と振動特性の評価）

2026年5月16日(土) 16:25 ~ 17:25 | F会場(環境棟：7階講義室)

OS-09 (2)

座長:犬伏 徹志(近畿大学)

16:25 ~ 16:40

[16015] 減衰モデルの歴史と最新の知見

*茂木 良宏[1]、中村 尚弘[2]、太田 成[3] (1. 大成建設株式会社、2. 関西学院大学、3. 構造計画研究所)

16:40 ~ 16:55

[16016] 生成AIによる建築物の減衰分野の最新情報の収集

*中村 尚弘[1] (1. 関西学院大学)

16:55 ~ 17:10

[16017] 観測加速度から変位波形を求める解析について

*犬飼 瑞郎[1] (1. 国立研究開発法人　建築研究所)

17:10 ~ 17:25

[16018] 伝達関数及び確率部分空間法を用いた床スラブの振動特性評価

*組原 理玖[1]、宮津 裕次[1]、髙橋 祐貴[1]、増田 圭司[2]、佐々木 康人[2]、大塚 友理[2] (1. 東京理科大学、2. 株式会社フジタ)

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

減衰モデルの歴史と最新の知見
History of Damping Modes and Latest Finding

茂木　良宏（大成建設）　中村　尚弘（関西学院大学・建築）　太田　成（構造計画研究所）
Yoshihiro MOGI, Design Division, Taisei Corporation
Naohiro NAKAMURA, School of Architecture., Kwansei Gakuin University
Akira OTA, Analysis Group, Kozo Keikaku Engineering
FAX: 03-3340-2964, E-mail: mg-ysh00@pub.taisei.co.jp

Inherent damping has traditionally been expressed as viscous damping. However, although viscous damping is easy to express mathematically, past studies have shown that it can cause various problems in numerical analysis. In the first half of this paper, we review past studies conducted domestically and internationally and share issues related to classical viscous damping models. In the latter half, we introduce several damping models proposed in recent years to overcome these issues.

１．はじめに

建築物の地震応答解析における内部減衰は、主架構の塑性化に伴う履歴減衰と、接合部摩擦や非構造材等に起因する非履歴型減衰に大別される。後者は時間領域での厳密な表現が困難であるため、従来は等価粘性減衰として扱われてきた。実務では Rayleigh 減衰や剛性比例型減衰が広く用いられてきたが、その選定は歴史的経緯や慣行に依存しており、理論的整理が十分とは言い難い。

本稿では、1970 年代以降の減衰モデル研究の流れを概観するとともに、近年注目される振動数非依存型減衰モデルについて整理する。

２．初期剛性比例型と瞬間剛性比例型の論点

1970 年代，内部減衰を初期剛性に比例させるべきか，瞬間剛性に比例させるべきかが主要な論点であった [1]。RC 造の弾塑性解析が普及する中で、両者の応答差や実験整合性が議論されたが、統一的結論には至らなかった。

1980 年に Crisp[2]は、初期剛性比例型減衰を用いたことによって、部材降伏時に意図しない減衰力が発生することを指摘した。Bernal[3]はその理論的背景を示し、質量を有さない自由度（回転自由度など）に不釣合い減衰力が発生する機構を明らかにした。これにより RC 造では瞬間剛性比例型減衰の採用が広まった。

しかし 2000 年代に入り、瞬間剛性比例型減衰に物理的な重大な欠陥が存在することが認識され、数値解析上の表現方法が見直された。多くの弾塑性応答解析プログラムは増分方程式から求まる増分変位、増分速度、増分加速度を累加させていく仕組みであるため、これまで減衰力$\boldsymbol{f_d}$も(1)式のように、瞬間減衰係数$\boldsymbol{C}^*$と増分速度$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}$の積で求まる増分減衰力$\Delta\boldsymbol{f_d}$を累積させる方式がに用いられてきた。一見すると自然な手法であるが、減衰力$\boldsymbol{f_d}$は最終的に原点に収束する保証がないため、応答が収束しても減衰力がゼロとならず、不自然な変形状態で静止する現象が確認された。そこで多くのプログラムは、減衰力を(2)式の瞬間減衰係数$\boldsymbol{C}^*$と速度$\dot{\boldsymbol{x}}$の積で表現するようになった。

増分形式:　$\boldsymbol{f_d} = \sum \boldsymbol{C}^* \cdot \Delta\dot{\boldsymbol{x}}$　(1)

全体形式:　$\boldsymbol{f_d} = \boldsymbol{C}^* \cdot \dot{\boldsymbol{x}}$　(2)

３．Rayleigh 減衰の課題と対策

Hall[4]は Rayleigh 型減衰の外部減衰と内部減衰の両方で生じる意図しない減衰力を、具体的な事例を用いて示している。以下にそれぞれの項による問題について整理している。

・　外部減衰(質量比例項)による意図しない減衰力

1)　免震建物のような剛体運動を伴う構造物では、建物全体に与えられる減衰定数は質量比例減衰項に起因して非常に大きくなる。

2)　構造物の一部が破損またはひび割れし、速度が大きくなった場合、質量比例減衰項によって大きい減衰力が生じる。

・　内部減衰(剛性比例項)による意図しない減衰力

1)　弾塑性解析で初期剛性が用いられた場合、応力に比べて大きな減衰力が発生する。

2)　瞬間剛性比例型を用いると、減衰力が急激に変化し不連続になる可能性があるため推奨できない。

Hall[4]はこれらの問題を回避する方法として、初期剛性比例型減衰の減衰力に頭打ちを設けた「キャップ減衰」を提案している。しかし、頭打ち量をどの程度にするかは重要なことであるが明確にされておらず、設計者の判断に委ねられている。

一方で、Cheney[5]や Jehel[6]は、簡単な 5 層建物モデルで時刻歴非線形応答解析を行い、初期 Rayleigh 型と瞬間 Rayleigh 型の違いについて比較している。それによれば、部材が塑性化すると固有周期が変わるため Rayleigh 減衰の目標振動数と減衰定数にずれが生じるが、瞬間 Rayleigh 型の方が、初期 Rayleigh 型に比べて良好に減衰を与えられることを示し、瞬間 Rayleigh 型の使用を推奨している。ただし減衰力の急激な変化が伴う場合もあり、その場合には時間刻みを細かくする必要があることを述べている。

Chopra[7]は意図しない減衰力を回避する別の方法として、瞬間剛性比例やキャップ減衰よりも Wilson-Penzien 減衰を推奨している。Wilson-Penzien 減衰は無質量自由度には減衰力が発生しないモデルであるため、意図しない減衰力は理論的に発生しないモデルとなっている。難点は減衰行列が密行列になるため、大規模解析で実用性がないことである。

また、Luco[8]は、瞬間剛性比例型減衰や Wilson-Penzien 減衰にも、質量のない自由度に意図しない減衰力が発生することを指摘している。これは数値計算上のノイズによるもので、これを回避するためには無質量自由度にも微量の初期剛性比例型減衰を付加することが有効であるとしている。

以上、1980 年代から始まる研究の多くは、意図しない減衰力をどのように回避するのかが減衰モデルの大きな関心であり、2000 年代以降も議論が交わされている。また 2000 年代以降には、解析モデルの大規模化や、多くの観測記録が蓄積されてきたことに伴い、減衰定数の振動数非依存性に関する研究も行われるようになってきた。

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

４．解析モデルの大規模化と減衰の振動数非依存性

近年の観測記録の分析によれば、2 次・3 次の振動モードにおける減衰定数は 1 次モードと同程度であることが確認されている。したがって高次モードの寄与が無視できない解析では、振動数依存性の小さい減衰モデルが求められる。Rayleigh 減衰は、二つの代表振動数間で減衰定数をほぼ一定に保てるものの、その有効範囲を確保するためには、当該二振動数を過度に離隔させることができないという制約がある。またモード減衰は全振動数域で一定減衰を設定可能だが、密行列を伴うため大規模解析では実用性に乏しい。このため、疎行列の利点を保持しつつ、広範な振動数帯域で減衰定数を一定に近づけることが可能な減衰モデルの考案が進められている。

４．１．因果的履歴減衰

履歴減衰は振動数領域において、複素剛性として容易に表現できる。一方、その複素剛性を時間領域へ変換することは、一般に因果律の破綻により困難であるとされている。時間領域で因果性を満たすためには、虚数関数の実部と虚部が Hilbert 変換の関係を成す必要がある。そこで虚数関数の実部を虚部の Hilbert 変換によって再評価することで、時間領域で利用可能な「因果的履歴減衰モデル(以降、因果減衰と略す)」[9]が提案されている。

$$\boldsymbol{f_d}(t) = 2h \cdot \boldsymbol{K}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\omega_{lim}} + \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot \boldsymbol{x}\left(t - \frac{2\pi \cdot j}{\omega_{lim}}\right)\right] \qquad (3)$$

hは減衰定数、ω_{lim}は一定としたい振動数領域の上限円振動数である。(3)式に示す因果減衰は、現在時刻tの速度に比例した剛性比例減衰項[Fig. 1(b)]と、複数の遅れ項[Fig. 1(c)]の和で表現される。しかし、(5)式の表現は過去の全変位応答を記憶しておくことになるため、数値解析上は記憶領域の制約などの問題が生じる。そこで、限られた遅れ項数Nで表現できるようb_jを最適化したモデル(N=2 項、4 項、9 項)を提案している。また Rayleigh 減衰の剛性項を因果減衰に置き換えることで、少ない N で広範な振動数領域で減衰定数一定領域を実現可能な「拡張 Rayleigh 減衰」[10]も提案されている。

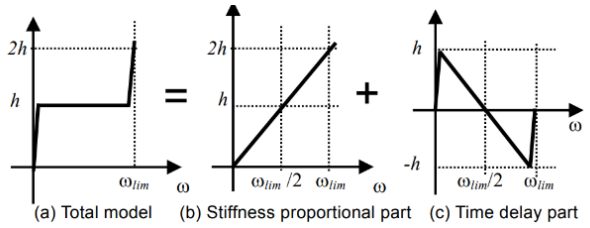


Fig.1　Image of causal damping model

４．2．一様減衰

Huang[11]は、幅広い振動数領域で振動数に依存しにくい減衰モデルを開発した。減衰定数を一定にできる周波数範囲は、Rayleigh 減衰よりもかなり広い。部材塑性変形後、減衰力は緩やかに減少するため、瞬間剛性比例型減衰よりも自然な振る舞いをする。適用範囲外では減衰定数が低下する特徴がある。動剛性が上昇する性質があり、低次モードでも剛性が 4%程度上昇(周期は 2%程度短くなる)し、高次モードになるほどその影響は強くなる。そのため、実位相地震波による解析では振動性状に大きな影響を与えることが明らかとなっている [12]。実際の建物は雑壁などの影響により、解析モデルよりも短周期化する可能性も考えられるが、そのようなエビデンスは存在しないため、このような性質を持つ減衰モデルを構造設計等でどのように使うのかは悩ましい問題である。

４．3．キャップ減衰

キャップ減衰は、初期剛性比例型減衰の減衰力に頭打ちを設けたモデルで Hall[4]によって提案された。建物が 1 次モードで振動している場合、部材復元力が弾塑性によって制限されない限り、1 次モード減衰は線形粘性減衰となる。次に振動系が 2 次モードで単振動している状態を考えた時、最大減衰力は同様に最大振幅$\boldsymbol{x}$を用いて(4)式で評価することができる。

$$\boldsymbol{f}_{dmax} = \frac{2h}{\omega_1} \cdot \boldsymbol{K} \cdot \omega_2 \cdot \boldsymbol{x} = 2h\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \boldsymbol{r}_{max} \qquad (4)$$

ω_1、ω_2はそれぞれ、1 次、2 次の固有円振動数を表す。(4)式は見かけ上、減衰力が振動数に比例して上昇したことになる。しかし、もし減衰力が$2h \cdot \boldsymbol{r}_{max}$を頭打ちにする場合、2 次モードで振動している系は、振動数に依存性した係数ω_2/ω_1が 1.0 となるため、仮に 1 次モードと 2 次モードが同一の振幅量で振動した場合は、1 サイクル当たりで吸収される減衰エネルギー量は同程度となる。

５．まとめ

本稿では、1970 年代ころから現在に至る文献を調査し、それらの知見を整理した。

参考文献

1) 表祐太郎, 武田寿一：超高煙突の弾塑性応答に関する研究(第 7 報)―応答におよぼす減衰効果の検討―, 日本建築学会学術大会梗概集(東北), pp.915-916, 昭和 48 年 10 月
2) Chrisp D.: Damping models for inelastic structures. Master's thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1980.
3) Bernal D.: Viscous damping in inelastic structural response, J. Struct. Eng.,120(4):1240–1254, 1994.
4) Hall J.F.: Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping, Earthq. Eng. Struct. Dyn.;35(5):525–545, 2006.
5) Charney F.A.: Unintended consequences of modeling damping in structures, J. Struct. Eng.,134(4), 581–592, 2008.
6) Jehel P, Leger P, Ibrahibegovic A.: Initial versus tangent-stiffness based Rayleigh damping in inelastic time history analysis, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 43:476–484, 2014.
7) Chopra A.K., McKenna F.: Modeling viscous damping in nonlinear response history analysis of buildings for earthquake excitation, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 45(2):193–211, 2016.
8) Luco J.E., Lanzi A.: Numerical artifacts associated with Rayleigh and modal damping models of inelastic structures with massless coordinates, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 48(13):1491–1507, 2019.
9) Nakamura N.: Practical Causal Hysteretic Damping, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 36(5), 597-617, 2007.
10) Nakamura N.: Extended Rayleigh Damping Model, Front Built Environ, 2016.
11) Huang Y., Strurt R., Willford M.: A damping model for nonlinear dynamic analysis providing uniform damping over a frequency range, Comput. Struct., 212, 101-109, 2019.
12) Mogi Y., Nakamura N., Nabeshima K., Ota A.: Performance of Inherent Damping Models in Inelastic Seismic Analysis for Tall Building Subject to Simultaneous Horizontal and Vertical Seismic Motion, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 52(12), 3746-3764, 2023.

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

生成 AI による建築物の減衰分野の最新情報の収集
Gathering the latest information on building damping by generative AI

中村　尚弘（関西学院大学）
Naohiro NAKAMURA, Kwansei Gakuin University
E-mail: naohiro0043@gmailcom

Generative AI has been developing rapidly in recent years. This paper considers how to utilize generative AI for research positions in the field of "building damping" within the field of structural engineering. Recently, the number of overseas research journals and papers has increased, making it difficult to keep up with the latest developments. To solve this problem, this paper attempts to use ChatGPT, one of generative AI, and reports the results. First, it examines current issues and future research directions. Furthermore, it presents 20 papers that can be used as references for understanding the latest information in the field.

１．はじめに

近年、ChatGPT[1)]をはじめとする生成 AI が急速に進展し、大きな話題となっている。これに関する書籍や雑誌の記事も極めて増加している。生成 AI は大規模言語モデル（LLM: Large Language Model）に基づく技術であり、自然言語処理（NLP : Natural Language Processing）により、実用性が急速に向上した。

一方で筆者は、生成 AI が娯楽や趣味の世界で用いられる例は多いが、実務に向けても多数の書籍が出版されている。しかし、その多くは事務職や営業職に向けたものが多く、技術職特に著者らが関係する建築構造系分野についてはあまり見られないと感じている。本報は、建築構造系分野のうち、「建築物の減衰」分野の研究職に向けて生成 AI の活用法について考えたものである。

研究者がテーマを考えたり論文を作成したりする場合、必須となるのが、その分野の「既往の研究」の調査である。このためには、最新の研究を把握する必要がある。

この分野の国内の論文であれば、建築学会論文集や技術報告集を当たれば概ね足りると思うが、海外の論文は難しい。従来は Earthquake Engineering and Structural Dynamics や ASCE Engineering Mechanics などのいくつかの主要な論文集を見れば概ね足りていたように思う。

しかし最近は論文集の数と論文数が増加したため、これらの最新状況を把握するのは困難になってきた。本報ではその解決法として、生成 AI のうち ChatGPT を試みたので、以下にその結果を報告する。

２．現状の課題

1) 観測・同定（OMA/強震記録）側の課題

- 減衰比は同定が不安定：固有振動数より推定誤差が大きく、手法・ノイズ・近接モード等で値が揺れやすい。結果として「点推定」をそのまま設計・解析入力に使うと危うい。
- 近接モード・高層の難しさ：高層建物などでモード間隔が狭いと、減衰同定がさらに難しくなるため、改良 OMA や検証が必要。
- “振幅依存”の扱いが未整理：微動・風レベルで同定した減衰を、強震レベルに外挿できるとは限らない（振幅・損傷依存）。観測データの振幅レンジが限定されることも課題。

2) 解析モデル（NLTHA/FE）側の課題

- 非線形解析での粘性減衰の入れ方に“決定版がない”：履歴（材料・部材）でエネルギーが散逸するのに、Rayleigh 等の粘性減衰を重ねると二重計上や、周波数帯によっては過減衰を招く恐れがある。
- Rayleigh/Caughey の“目的関数”が曖昧になりがち：どのモード帯を再現したいのか、非線形化後に何が起きるのか（剛性低下でフィットが崩れる等）を明示しないと、結果の解釈が難しい。
- 未モデル化要素（非構造材・接合摩擦・設備・SSI 等）が減衰に混ざる：解析モデルで表現しきれない散逸が“粘性減衰”に押し込まれ、建物タイプや状態で一般化しにくい。

3) 設計実装（規準・性能評価）側の課題

- 設計前提（例：基準減衰スペクトル）と、現物の減衰（可変）とのギャップ：特に制振・免震のような高減衰領域では、減衰補正係数・設計手続きの扱いが結果を左右する。
- “不確かさの提示”が不足：減衰が結果に効くケース（変位・層間変形など）でも、設定値を 1 本に固定して示すとリスク評価がしづらい。ベイズ等で同定の不確かさを出す方向が出てきているが、実務標準にはなり切っていない。

4) まとめ

現状の核心課題は「減衰は変わる（振幅・状態依存）」「同定が不安定」「非線形解析で入れ方が結果を左右」の 3 つに整理できる。

３．今後の研究の方向（有望な流れ）

1) 「点」ではなく「分布（不確かさ）」で減衰を扱う

- ベイズ OMA のように、減衰比を最尤値＋不確かさとして出し、解析・判断もレンジで示す（性能評価・既存建物・SHM と相性が良い）。

2) OMA の高度化＋データ駆動による頑健な評価法

- 近接モードに強い OMA の改良や、データ駆動（例：時系列学習）で減衰同定の安定化を狙う研究が進む。
- 近接モード・低 S/N でも頑健な評価法をめざす

3) 非線形解析での「役割分担」を前提にした減衰モデル

- 履歴モデルが担う散逸と、未モデル化散逸（非構造・摩擦等）を分け、粘性減衰は後者の最小限の代表として扱う思想を明確化する（＋感度分析をセット運用）。

4) Rayleigh/Caughey は「使い方を規格化」する方向

- どの周波数帯（モード）に合わせるか、非線形化後の影響、数値振動抑制目的か物理モデル目的か、を明文化して“再現したい量”で選ぶ（Caughey の調整自由度を活かす等）。

5) 高減衰（制振・免震・原子力等）は 高減衰スペクトル／補正の再整理

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

・ 高減衰領域のスペクトル構築・補正係数の整備と、コード手続き比較（免震設計の枠組み）を体系化する流れ。

6)「データとベンチマーク」の整備がボトルネック

・ 実建物モニタリングが増えつつあるが、建物種別・仕上げ・設備・劣化などのメタ情報込みで共有できないと一般化が難しい。今後は、公開データ＋共通評価指標（同定誤差、再現性）の整備が重要になる。

7) まとめ

今後の方向は「不確かさ込み（ベイズ）」「OMA/データ駆動で頑健化」「非線形解析では役割分担＋感度分析」「高減衰設計の体系化」が中心となるのではないか。

7．参考となる文献 20 編

建築物の減衰分野の最新情報を把握する上で、参考となる論文（20 編）として生成 AI は以下を挙げた。

A. OMA（Operational Modal Analysis）・減衰同定（不確かさ、近接モード、AOMA）

1. **Zheng, Y. (2025)** “Revisiting damping identification: limitations and …” *Frontiers in Built Environment*（減衰同定の限界・誤差論点を整理したレビュー寄り）
2. **Pan, H., et al. (2025)** “Bayesian operational modal analysis of two supertall buildings …” *Engineering Structures*（BAYOMA で減衰＋不確かさを同時推定、強風イベント実測）
3. **He, J., et al. (2026)** “Automated Bayesian operational modal analysis using …” *Engineering Structures*（自動化 AOMA×ベイズで減衰推定を実務寄りに）
4. **Shang, X.-Q., et al. (2024)** “Operational Modal Analysis … with Closely Spaced Modes …” *Sensors*（近接モードでも減衰まで安定に出す工夫）
5. **López-Aragón, J.A., et al. (2024)** “Influence of the modal damping ratio calculation method …” *Bulletin of Earthquake Engineering*（減衰算定法の比較レビュー：log dec / bandwidth / RDT 等）
6. **(CityU 系 PDF, 2025)** “Operational modal damping identification based on … (DISD/CS 系)”（圧縮計測×OMA で減衰推定を改善、SHM 応用）
7. **Noh, J., et al. (2025)** “Damping Ratio Estimation of Heavily Damped Structures …” *Sensors*（高減衰系での推定手法・課題整理、制振/免震とも相性）
8. **Moore, H., et al. (2026)** “Damping ratio identification of a volumetric modular high-… building …” *Engineering Structures*（実建物モニタリングで減衰同定、建物タイプ差の議論に使える）
9. **Castelli, S., et al. (2024)** “Operational modal analysis, seismic vulnerability assessment …” *Bulletin of Earthquake Engineering*（OMA＋FE モデル更新＋損傷評価の実例）
10. **Luo, S., et al. (2025)** “First-Order Structural Modal Damping Ratio Identification …” *Coatings*（自由減衰応答から一次減衰を抽出する実装寄り提案）

B. 非線形時刻歴解析（NLTHA）での減衰モデル（Rayleigh の落とし穴、代替案、感度）

11. **Ghahari, F., et al. (2024)** “Quantification of modeling uncertainty in the Rayleigh damping model …” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*（Rayleigh 減衰の不確かさ定量化フレーム）
12. **Chopra, A.K. & McKenna, F. (2016)** “Modeling viscous damping in nonlinear response history analysis of buildings …” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*（“スプリアス減衰力”問題の定番。SOTA の必読基盤）
13. **Qian, X., et al. (2021)** “Modeling viscous damping in nonlinear response history …” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*（線形粘性モデルと非線形モデル比較、設計者の選択に有用）
14. **Jehel, P., et al. (2013)** “Initial versus tangent stiffness-based Rayleigh damping in inelastic time history analysis”（初期剛性型 vs 接線剛性型の比較。いまも参照される整理）
15. **(ASCE, 年不明：論文ページ)** “Enhanced Rayleigh Damping Model for Dynamic Analysis …” *Journal of Structural Engineering (ASCE)*（tangent stiffness 等の改良 Rayleigh の系譜を押さえる）
16. **Nakamura, N., et al. (2024)** “Frequency-independent damping models for a high-rise …” *Frontiers in Built Environment*（“周波数依存しない減衰”の扱い・比較。減衰モデル設計の論点整理に便利）
17. **Chen, Y., et al. (2024)** “Research on the Value of Rayleigh Damping Parameter in …” *Buildings*（Rayleigh 係数設定の実務的論点：解析法（陽解法/陰解法）差など）
18. **(NZSEE 2024, PDF)** “A Review on Nonlinear Time History Analysis of Structures”（NLTHA 全体のレビュー。減衰モデルの位置づけ整理に使える）

C. 振幅依存・高層建物の実測（風・台風等）と減衰の変化

19. **He, Y., et al. (2023)** “Amplitude dependence of natural frequency and damping … (five supertall buildings under typhoon)”（300m 級×台風で振幅依存を実測、強風域の SOTA 材料）
20. **Gong, F., et al. (2025)** “Experimental Study on the Damping Ratio Evaluation of a …”（振幅・初期応力依存など、減衰が状態量で変わる例として引用しやすい）

用語の説明

CityU：City University of Hong Kong
NZSSE：New Zealand Society for Earthquake Engineering
NLTHA or NTHA：Non-Linear Time History Analysis
OMA：Operational Modal Analysis：運用時モーダル解析: 入力（地震力や加振機の力）を計測せず、建物の出力応答（加速度・変位など）だけから、その建物の振動特性（固有振動数・減衰比・モード形）を推定する方法。振動源は風、常時微動、交通振動、人の活動などの「自然・環境励起」である。代表的な OMA 手法としては FDD（Frequency Domain Decomposition）などがある。

参考文献

1) https://chatgpt.com/

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

観測加速度から変位波形を求める解析について
Analyses for Displacement Waves based on Ground Acceleration Records

犬飼　瑞郎（国立研究開発法人建築研究所）
Mizuo INUKAI, Building Research Institute, Japan
E-mail: maidcm2401@gmail.com

In decades, many seismographs have been installed, recording accelerations on the ground surface near the epicenter. These accelerations have attracted considerable attention in the fields of earthquake engineering and seismology. In the case of large earthquakes, it is known that residual displacement occurs due to ground movement, etc. It is possible to investigate whether this could be analytically determined from the acceleration records. In this study, a time history response analysis for integration is modified. It is the time integration using *mck*.

１．はじめに

近年，多くの地震計が設置され，震央付近の地表面で観測加速度が記録されている．観測加速度は，地震工学や地震学の分野で関心が高く，加速度を積分することにより，地震計自体の速度波形，変位波形が少なからず求められている．しかし，実際に，積分すると，速度，変位が発散することが多いため，基線補正や，長周期成分をカットするフィルタリング等が用いられてきた．[1),2)]

ところで，大地震の場合，地盤の隆起等により残留変位が生じていることが知られており，これを地震計の観測加速度から，解析で求められないか検討した．観測加速度$\ddot{y}$を積分するには，$\ddot{y}$と観測時間間隔Δt を用いることが多いが，他にも積分方法は有り，本検討では，時刻歴応答解析を積分用に修正して，*mck* を用いた時間積分を用いた．

２．*mck*を用いた時間積分

mck を用いた時間積分とは，1 質点系の地震応答解析 [1)]における，1 質点を地震発生中の不動点となるように剛性，質量，もしくは，周期を設定し，1 質点の上から，地表面を見下ろした時の加速度，速度，変位を求めるものである．その運動方程式には，1 質点系の地震応答解析における，減衰強制振動の運動方程式における右辺の観測加速度$\ddot{y}$の符号を正に代えた式(1)を用いた．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\ddot{y} \tag{1}$$

ここで，*m*:1 質点の質量，*c*:減衰係数，*k*:剛性，x :地表変位，$\dot{x}$:地表速度，$\ddot{x}$:地表加速度，$\ddot{y}$:観測加速度，とした．

時刻 *t* における地表加速度を$\ddot{x}_t$，地表速度を$\dot{x}_t$，地表変位をx_t，及び，時刻$t+\Delta t$の観測加速度を$\ddot{y}_{t+\Delta t}$，と現せば，時刻$t+\Delta t$の地表加速度を$\ddot{x}_{t+\Delta t}$，地表速度$\dot{x}_{t+\Delta t}$，地表変位$x_{t+\Delta t}$は，以下の式(2)～式(4)のとおり求まる．ここで，時刻$t=0$における初期値は，$\ddot{x}_{t=0}-\ddot{y}_{t=0}=-(c/m)\ddot{y}_{t=0}\Delta t$，$\dot{x}_{t=0}=\ddot{y}_{t=0}\Delta t$，$x_{t=0}=0$ である．

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = -\frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t} - \frac{k}{m}x_{t+\Delta t} + \ddot{y}_{t+\Delta t} \tag{2}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + (\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t})\frac{\Delta t}{2} \tag{3}$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t\Delta t + \left(\frac{\ddot{x}_t}{3} + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6}\right)(\Delta t)^2 \tag{4}$$

本解析では，1質点が不動点となるように，剛性*k*を滑り支承の剛性よりも更に小さく設定した．つまり，地震応答解析で用いられる周期$T = 2\pi\sqrt{m/k}$を20秒以上に設定した．周期20秒以上は，通常の耐震工学では適用されない，大きな数値である．減衰定数h (= $c/(2\sqrt{mk})$)は，多く用いられる0.05とした．

本解析により，平成7年(1995年)兵庫県南部地震(震度7)において，神戸市中央区中山手で観測された加速度(震度6)のNS方向$\ddot{y}$(ピーク値:-818.0 gal)，及び，それを積分した結果が，図1～図4である．文献[3)]では，気象庁HP公表の360秒間の観測加速度を基に，変位波形等を示したが，本稿では，オフラインデータ[4)]の1,791秒間の観測加速度等を示した．

図 1 が$\ddot{y}$であり，図 2～図 4 を求める時に，*T* は，地表速度，地表変位の図が適切なものになるように，*T*=20，50，100，200，300，500，1,000，10,000 秒等から選び，*T*=200 秒とした．*T*=200 秒の時，地表加速度$\ddot{x}$(ピーク値：-818.0 gal)(図 2)と観測加速度$\ddot{y}$の差(= $\ddot{x}-\ddot{y}$)は，全観測時刻を通じて，0.3 gal 以下であり，$\ddot{x}$は，ほぼ$\ddot{y}$と一致したと言える．地表速度$\dot{x}$は，最大値：+92 kine を時刻 33 秒頃に示し，本震後の 60 秒以降は，地表速度の大きさは，8 kine 以下が求められた(図 3)．地表変位 *x* は，最大値：+51 cm を時刻 86 秒頃に示し，ピーク値：-73 cm を時刻 348 秒頃に示した(図 4)．ここで，符号+が北方向である．

図 3 は，多くの大地震において，本震後の地表速度が 0 kine に近い値まで小さくなることを現し，図 4 は，本震後の地表面がまだ動いているように感じられることを現している．また，周期 *T*=200 秒という，人が想像しにくい長い周期は，その観測点での地表面の固有周期と考えられる．

図 4 の時刻 86 秒までの図を見ると，地表変位が増大し続けて見えるので，基線補正等が必要に思われるが，敢えて行わず，そのまま，時刻 86 秒以降も，本解析を続けた．また，基線補正は，変位を補正すると同時に，実は元の観測加速度も変える恐れがあるので，ここでは行わなかった．他に，本解析では，*k* を変化させていないにも関わらず，地表変位は 0cm に戻らず，解析終了の時刻 1,791 秒に，*x*=-3.52cm が求められ，その後も振動が続いていると考えられる．もし，時刻 1,791 秒以後も観測加速度が有れば，残留変位と言われる地表変位を，解析で求められる可能性がある．

３．加速度の伝達率

上記で$\ddot{y}$から$\ddot{x}$を求めた時の加速度の伝達率を，調和振動により調べた．式(1)の$\ddot{y}$を，一定振幅 *P*，観測加速度の周期T_Qを使って，$\ddot{y} = (P/m)\cdot\sin(2\pi/T_Q)t$ という調和振動に設定すれば，$\ddot{x}$は式(5)，式(6)となる．

$$\ddot{x} = -\frac{P}{k}\cdot\frac{(2\pi/T_Q)^2}{\sqrt{\left[1-(T/T_Q)^2\right]^2+\left[2h(T/T_Q)\right]^2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_Q}t-\varphi\right) \tag{5}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left[2\cdot h\cdot T_Q\cdot T/\left({T_Q}^2-T^2\right)\right] \tag{6}$$

ここで，$\ddot{y}$の振幅$\ddot{Y}(=P/m)$と，$\ddot{x}$の振幅$\ddot{X}$

$$\ddot{X} = \frac{P}{k}\cdot\frac{(2\pi/T_Q)^2}{\sqrt{\left[1-(T/T_Q)^2\right]^2+\left[2h(T/T_Q)\right]^2}} \tag{7}$$

の比 μ (式(8))が，加速度の伝達率と言える．

$$\mu = \ddot{X}/\ddot{Y} = \left(T/T_Q\right)^2/\sqrt{\left[1-\left(T/T_Q\right)^2\right]^2+\left[2h\left(T/T_Q\right)\right]^2} \tag{8}$$

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

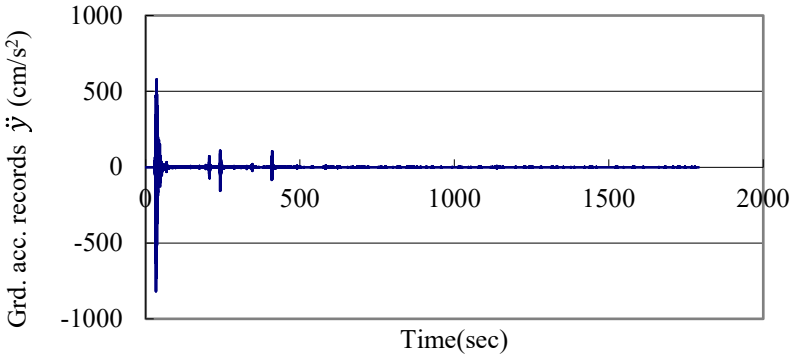


Fig. 1 Ground acceleration records $\ddot{y}$ (cm/sec^2) during 1,791 sec. in 1995 Kobe Earthquake NS.

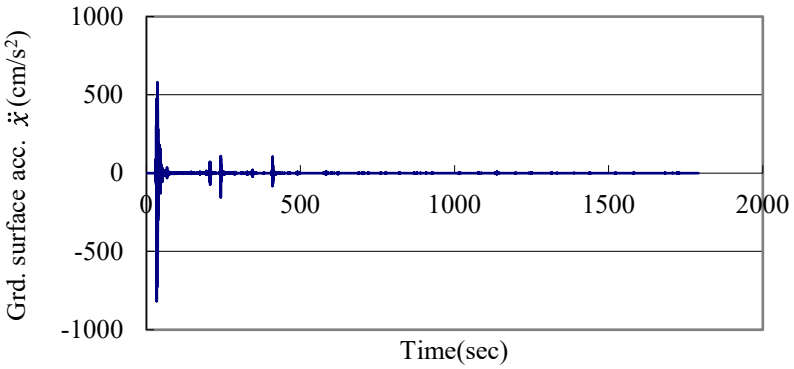


Fig. 2 Ground surface acceleration $\ddot{x}$ (cm/sec^2) during 1,791 sec. based on $\ddot{y}$ (h=0.05, T=200 sec.)

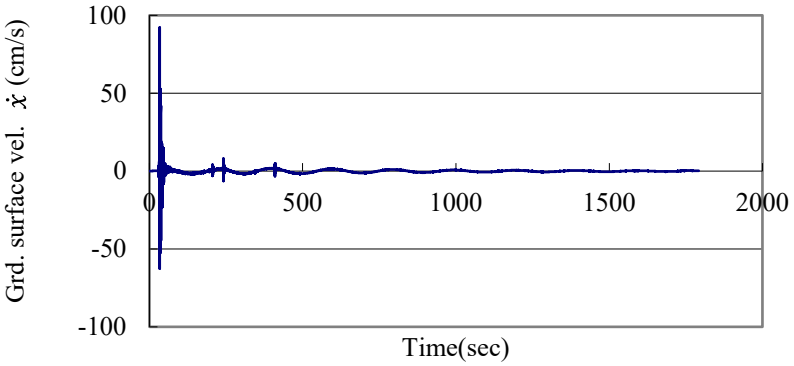


Fig. 3 Ground surface velocity $\dot{x}$ (cm/sec) during 1,791 sec. based on $\ddot{y}$ (h=0.05, T=200 sec.)

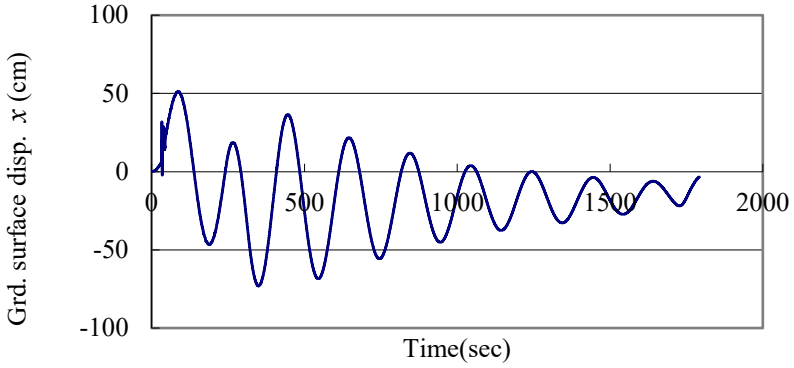


Fig. 4 Ground surface displacement x (cm) during 1,791 sec. based on $\ddot{y}$ (h=0.05, T=200 sec.)

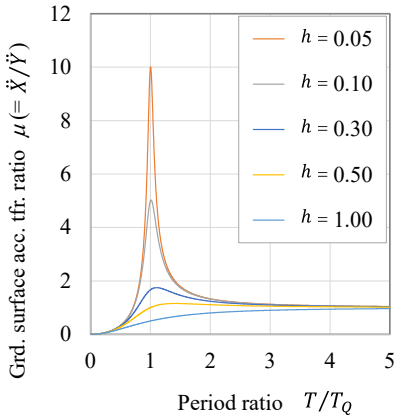


Fig. 5 Relationship between Ground surface acceleration transfer ratio $\mu\ (=\ddot{X}/\ddot{Y})$ and Period ratio T/T_Q

式(8)より，μ と周期比T/T_Qの関係を，減衰定数hをパラメーターとして描くと，図 5 になる．いずれの曲線も，$T/T_Q \to 0$ の時に μ =0 となり，$T/T_Q \to \infty$の時に μ =1 となる．図 1 の$\ddot{y}$をフーリエ変換した時の振幅が一定値以上となるT_Qは，ほぼ 10 秒以下なので，2. の T=200 秒では，$T/T_Q \geqq 5$ と考えられ，μ =1 と言えそうである．

4．まとめ

基線補正，フィルタリングを用いずに，観測加速度から変位波形を求める解析方法を開発するとともに，以下が判明した．

(1)平成 7 年(1995 年)兵庫県南部地震において神戸市中央区中山手で観測された加速度の NS 方向について，*mck* を用いた時間積分を行った．
(2)地表の固有周期 200 秒を用いて，地表の加速度，速度，変位を求めた．
(3)時刻 1,791 秒において，南方向に 3.52cm の地表変位が，本解析により求められた．
(4)継続時間 2,000 秒以上の観測加速度が望まれる．

参考文献

1) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版，1993
2) C. Minowa：Development of a New Method of Baseline Correction on Earthquake Strong Motions and Its Application to Long Period Sloshing Responses of Liquid Storage Tanks During Strong Earthquakes , Seismic Engineering, PVP-Vol. 466, 2003, ASME, pp.203-210.
3) 犬飼瑞郎：観測加速度から求めた速度波形，変位波形について，第 19 回年次大会梗概集，(公社)日本地震工学会，B-2-2, Paper No. 20250008, pp.1-6, Nov. 2025
4) (一財)気象業務支援センター：地震・火山関連のオフラインデータ，加速度データ(強震波形データ・87 型)1995 年，CD, https://www.jmbsc.or.jp/jp/offline/data/cd_list.pdf

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

伝達関数及び確率部分空間法を用いた床スラブの振動特性評価

Evaluation of vibration characteristics of floor slab using transfer function and stochastic subspace method

組原　理玖（東理大・創域理工）　宮津　裕次（東理大・創域理工）　髙橋　祐貴（東理大・創域理工）
増田　圭司（フジタ）　佐々木　康人（フジタ）　大塚　友理（フジタ）
Riku KUMIHARA, Tokyo University of Science
Yuji MIYAZU, Tokyo University of Science
Yuki TAKAHASHI, Tokyo University of Science　Keiji MASUDA, Fujita Corporation
Yasuhito SASAKI, Fujita Corporation　Yuri OTSUKA, Fujita Corporation
E-mail: 7122035@ed.tus.ac.jp

This study evaluates the vibration characteristics of floor slab by comparing transfer functions from impact tests with stochastic subspace identification (SSI) using ambient vibration data. While impact tests failed to identify certain modes due to excitation at nodes, SSI successfully captured all primary modes regardless of input conditions. The natural frequencies and mode shapes identified by SSI showed high accuracy, consistent with traditional methods. However, SSI produced lower damping ratios, reflecting the amplitude dependency of damping during minute ambient vibrations.

１．はじめに

近年、建築物の大規模化や多用途化に伴い、床の大スパン化が進んでいるが、歩行等の鉛直振動が居住性能を損なう要因となるため、その振動特性を正確に把握する必要がある。従来では、加振試験に基づき算出した伝達関数から振動特性を評価することが一般的だが、加振位置の適切な選定や加振力の正確な測定などの課題がある。また、構造ヘルスモニタリングの普及に伴い、環境振動を利用する手法が求められており、出力データのみに基づくシステム同定手法である確率部分空間法（以下、SSI）が注目されている。建物全体を対象とした研究[1]においてSSIの有効性が示されているが、床にSSIを適用した例は知る限りない。そこで本研究では、実在床を対象に、加振試験による伝達関数の算出と、常時微動計測データへのSSIの適用を行い、両手法から同定された床の振動特性を比較することで、床の振動評価におけるSSIの適用可能性を検討する。

２．対象床と振動計測の概要

２．１　対象床の概要

計測対象は東京理科大学野田キャンパス内にある鋼構造建物の床とする。対象教室の床はデッキスラブで、仕上げ材には厚さ10 mmのタイルカーペットを使用している。

２．２　計測概要

センサの水平性は治具を用いることで確保し、サンプリング周波数500 Hz、仕上げ材は敷設したままの状態で計測を行った。Fig. 1に各ケースの計測位置と加振位置を示す。

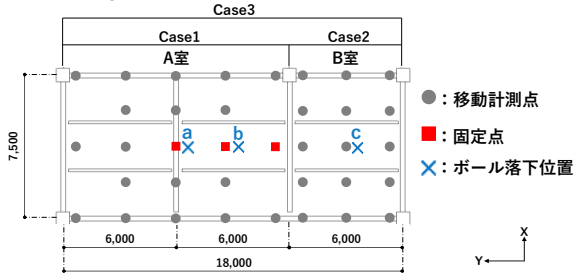


Fig. 1 Measurement and excitation position for each case.

Case 1、Case 2では各室を対象に常時微動計測と加振試験を、Case 3では2室を対象として加振試験のみ行った。加振源には重量床衝撃音発生器YI-01[2]（以下、ゴムボール）を用い、加振力の測定は加振試験とは別にロードセルを用いて計測を行った。

３．伝達関数を用いた床の振動特性評価

３．１　伝達関数による振動特性の同定方法

ゴムボールの加振力を入力、各計測点での応答加速度を出力とし、時刻歴データを時間軸上で同期させ、伝達関数を算出する。推定された複素伝達関数の振幅特性と位相特性から固有振動数を同定する。モード形状は各計測点の加振点との位相差を考慮したうえで最大振幅を1として正規化したモードベクトルを抽出する。減衰定数は加振点近傍の加速度データに対して伝達関数を算出し、カーブフィッティング法を適用することで同定する。

３．２　同定結果

伝達関数より同定した固有振動数と減衰定数の結果をFig. 2に、Case 3におけるモード形状をFig. 3に示す。

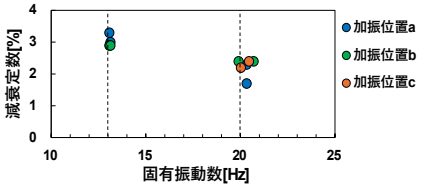


Fig. 2 Damping ratios and natural frequencies evaluated by transfer function.

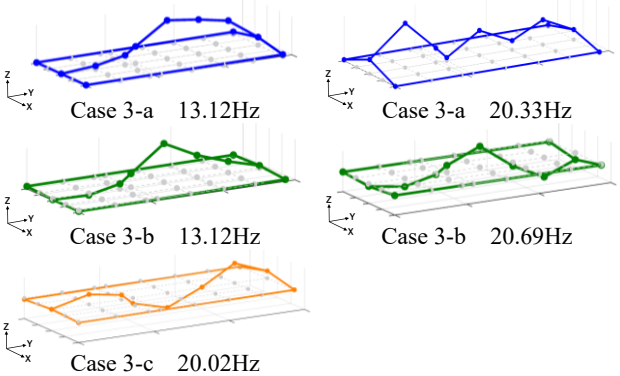


Fig. 3 Mode shapes evaluated by transfer function.

伝達関数により、対象床における主要なモードとして13 Hz帯と20 Hz帯の2つのモードが同定された。13 Hz帯の

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会

モードは、中央付近が最大振幅となり全体が同位相で振動する挙動を示し、20 Hz 帯のモードは、長辺方向を 3 分割する位置に節が形成され、節を境に逆位相となる挙動を示した。これらは四辺支持スラブにおける 1 次モード、3 次モードに相当する。また、20 Hz 帯のモードに関して、モードの節となる a 点を加振した場合、当該モードを十分に励起することができず､同定精度が低下する結果となった。

４．確率部分空間法を用いた床の振動特性評価

４．１　確率部分空間法による同定方法

振動解析ソフトウェア ARTeMIS を使用して、常時微動計測データに対し確率部分空間法 [3]（SSI）を適用することで振動特性を同定する。Case 3 では Case 1、Case 2 における計測データを Fig.1 に示す固定点でマージしている。

４．２　同定結果

SSI を用いた同定では建物全体の上下振動モードも確認されたが、本研究では伝達関数による結果との比較を行うため、建物全体の上下振動モードは除外した。Fig. 4 には床の振動モードに対応する固有振動数と減衰定数を示す。SSI を適用した場合､伝達関数により同定された 13 Hz 帯、20 Hz 帯のモードに加えて 17 Hz 帯のモードが全ケースにおいて同定された。Fig. 4 より、固有振動数はケース間の差が小さく安定した結果が得られた一方で、減衰定数は高次モードにおいてケースごとのばらつきが見られた。各ケースにおけるモード形状を Fig. 5 に、各ケースにおける 17 Hz 帯のモード形状を Fig. 6 に示す。17 Hz 帯のモードは長辺方向を 2 分割する位置に形成された節を境に逆位相となる挙動を示し、四辺支持スラブにおける 2 次モードに相当する。このモードが伝達関数から同定されなかった理由として､加振位置 a､b が当該モードの節近傍であったことや、c 点での加振力が間仕切壁等の影響を受け、隣接する A 室に十分に伝達されなかったことが考えられる。

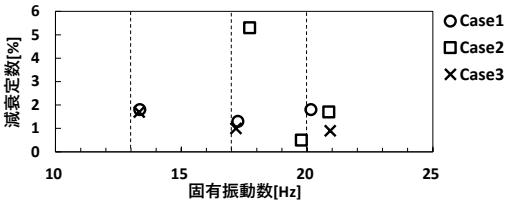
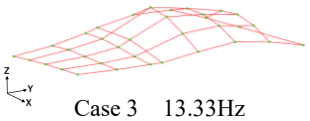


Fig. 4 Damping ratios and natural frequencies evaluated by SSI.



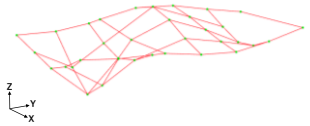
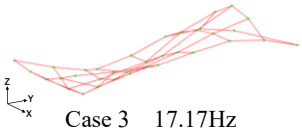


Fig. 5 Mode shapes evaluated by SSI.



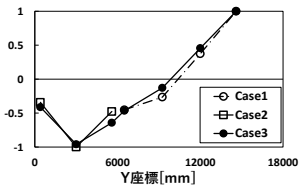


Fig. 6 Comparison of mode shapes at 17 Hz.

５．確率部分空間法の同定精度の検証

５．１　固有振動数および減衰定数の比較

両手法により同定された固有振動数と減衰定数の結果を Fig. 7 に示す。どちらの手法でも、対象床の主要なモードとして 13 Hz 帯と 20 Hz 帯のモードが同定され、SSI を用いた場合のみ 17 Hz 帯のモードが同定された。また、SSI を用いた場合、固有振動数は伝達関数と概ね一致したが、減衰定数は 20 Hz 帯にばらつきが見られ、全体的に伝達関数の結果より低く同定される傾向が見られた。これは減衰性能の振幅依存性によるものと考えられる。

５．２　モード形状の定量的比較

両手法により同定したモードの形状を定量的に比較するため、Fig. 1 における X または Y 方向 1 列分について最大振幅を 1 として正規化し、重ねて描画したグラフを Fig. 8 に示す。13 Hz 帯では両手法によるモード形状が高い精度で一致しており、20 Hz 帯では振幅の大きさに差は見られるものの、モードの腹・節の位置関係や節を境に位相が反転するといった形状特性は SSI においても正確に捉えられていることが確認できる。また、Case 3 の 20Hz 帯において、c 点加振では隣室への振動伝達が不十分であったためモード形状の同定精度が低下したと考えられるが、SSI では 2 室全体にわたるモード形状を明瞭に同定できている。

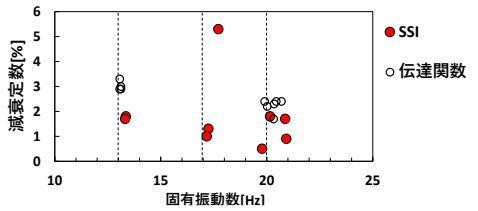


Fig. 7 Comparison of damping ratios and natural frequencies evaluated by SSI and transfer function.

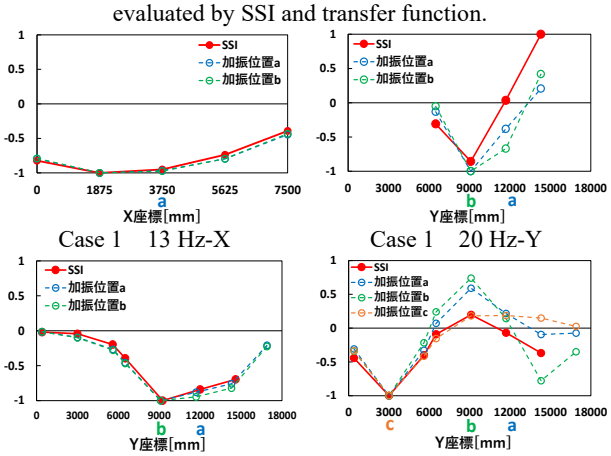


Fig. 8 Quantitative comparison of mode shapes.

６．まとめ

常時微動を用いる SSI ではボール加振による伝達関数では捉えられなかったモードも同定できることが確認された。固有振動数およびモード形状については、SSI と伝達関数による同等結果は同等であった。減衰定数については、常時微動を用いる SSI の結果は伝達関数による結果と比較して小さくなる傾向であった。これは、減衰性能の振幅依存性によるものと考えられ、減衰定数の評価にあたっては注意を要することが示された。

参考文献

1)　手塚智生，金澤健司，栗田哲：確率部分空間法による基礎固定系建物の振動特性同定法，日本建築学会構造系論文集(第 88 巻,第 805 号,403-413),2023.03
2)　JIS A 1418-2:2019: 建築物の床衝撃音遮断性能の測定方法 -第 2 部: 標準重量衝撃源による方法
3)　和田清，奥宏史，田中秀幸，大松繁：システム同定，コロナ社, 2017

©公益社団法人土木学会 応用力学委員会