

一般セッション | 一般セッション（第一部門：物理数学力学問題 ー物理現象のモデル化から逆問題までー）

2026年5月17日(日) 14:45 ~ 16:00 | A会場(環境棟：2階講義室)

第1部門(3)

座長:木本 和志(岡山大学)

14:45 ~ 15:00

[21011] 線型弾性論に於ける自己平衡応力場と偶応力場について(シンポジウム講演概要)

*鳥巢 茂樹¹ (1. 武庫川女子大学)

15:00 ~ 15:15

[21012] 光音響法で励起された超音波の指向性とビーム合成性能に関する研究（シンポジウム講演概要）

*木本 和志¹、一水 信之介¹、斎藤 隆泰² (1. 岡山大学、2. 群馬大学)

15:15 ~ 15:30

[21013] 微小散乱源の解析に関わる量子論と古典論からのアプローチの比較（シンポジウム講演概要）

*東平 光生¹ (1. 東京理科大学)

15:30 ~ 15:45

[21014] ねじりモーメントを受けるCFRP接着鋼管のせん断遅れ理論（シンポジウム講演概要）

*水谷 壮志¹、伊佐治 響己¹、石川 敏之¹ (1. 関西大学)

15:45 ~ 16:00

[21015] 大域参照勾配を用いたHermite族有限要素法による三次元橋梁モデル（シンポジウム講演概要）

*勝山 俊平¹、山本 亨輔¹ (1. 筑波大学)

線型弾性論に於ける自己平衡応力場と偶応力場について (シンポジウム講演概要)

On the self-equilibrated stress fields and couple stress fields in Linear Theory of Elasticity

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

鳥巢 茂樹 (武庫川女子大学・建築)
Shigeki TOSU, Mukogawa Women's University
E-mail: tosu@mukogawa-u.ac.jp

The Cauchy stress field, a symmetric tensor field, ensures couple equilibrium on a sub-body, but it is indeterminate with respect to external force fields because it contains self-equilibrated stress components that exist in the absence of external loading. Eliminating these components renders the stress field unique relative to the external forces, and the traction field also becomes unique. The resulting stress field admits scalar and vector potentials, but maintaining couple equilibrium on a sub-body requires the existence of couple stresses. Thus, eliminating self-equilibrated stresses while excluding couple stresses is incompatible.

1. 線型弾性論

3次元 Euclid 空間上の単連結領域を占める弾性体 B が、外力場に依り $\hat{B}$ に変形し、静力学的に平衡するとき、物体力・表面力 vector 場 $\{\hat{f}(\hat{x}) d\hat{V}, \hat{t}(\hat{\xi}) d\hat{S}\}$, $\hat{x} \in \hat{B}$, $\hat{\xi} \in \partial\hat{B}$ を、 $\{f(x) dV = \hat{f}(\hat{x}) d\hat{V}, t(\xi) dS = \hat{t}(\hat{\xi}) d\hat{S}\}$, $x \in B$, $\xi \in \partial B$ と物質表示し、変位 vector 場を $u(x) = \hat{x} - x$ とすれば、外力場の並進力・偶力平衡式は下式となる。

$$\int_{x \in B} f(x) dV + \int_{\xi \in \partial B} t(\xi) dS = 0 \quad (1)$$

$$\int_{x \in B} (x + u(x)) \times f(x) dV + \int_{\xi \in \partial B} (\xi + u(\xi)) \times t(\xi) dS = 0 \quad (2)$$

このとき、変位場 $u(x)$ と外力場 $\{f(x) dV, t(\xi) dS\}$ は幾何学的非線型となり、数理的扱いが困難となる。

そこで、変位場および外力場が微小量と仮定すれば、非線型項 $\{u(x) \times f(x), u(\xi) \times t(\xi)\}$ は 2 次微小量として無視出来て、線型化出来ると言うのが、所謂微小変位理論^{1)487G}である。しかし、弾性 energy $\{u(x) \cdot f(x) dV, u(\xi) \cdot t(\xi) dS\}$ も 2 次微小量として無視出来て、弾性論が成立しない。

線型弾性論では、外力場・内力場の並進力・偶力平衡に、変位場・歪場・構成則が関わらないことを前提とし、(2)式は

$$\int_{x \in B} x \times f(x) dV + \int_{\xi \in \partial B} \xi \times t(\xi) dS = 0 \quad (3)$$

となる。つまり、外力場は、弾性体の無変位・初期状態、即ち剛体状 B 上の vector 場であり、純幾何学的に、 B 上で内力場、即ち応力場と平衡する。変位場 $u(x)$ も、外力場と線型関係を成す B 上の vector 場と言う数理的措置と言える。

2. 弾性変形と変位場の可積分条件

弾性体と言う限り、他の連続体と一線を画する物性を備えている。その物性を端的に表せば、加力に依り isotropic かつ滑らかな変形を生じ、除荷すれば初期状態に復元する物性と言える。isotropic な変形とは、平たく言えば、内部構造、例えば弾性体に埋込まれた微細な格子構造を保存する変形であり、内部構造が破断・圧潰・重畳・反転あるいは自己交差・接触・貫入を生じない。更に、変形の滑らかさ、即ち内部構造が屈折・捩折を生じないことも求められる。

弾性体 B が外力作用に依り変形し、単連結領域 $\hat{B}$ となるとき、写像 $\varphi(x): x \in B \rightarrow \hat{x} = x + u(x) \in \hat{B}$ が局所的に単射または微分同相となるには、変位 vector 場 $u(x)$ は C^1 級で、連続な変位勾配 tensor 場 $J(x) = \nabla \otimes u(x)$ 、変形勾配 tensor 場 $F(x) = \nabla \otimes \varphi(x) = I + J(x)$ が存在し (勾配の一般的な表

現は $J^T(x), F^T(x)$)、下式を満足しなければならない。

$$\det(F(x)) = 1 + e(x) + \text{adj}(J(x)) : I + \det(J(x)) > 0 \quad (4)$$

なお、 $e(x) = \nabla \cdot u(x)$, $\omega(x) = \nabla \times u(x)$ とおき、偏差歪 tensor 場を $\bar{\epsilon}(x)$ 、置換 tensor を ϵ とすれば、 $J(x)$ は下式

$$J(x) = e(x) I/3 + \omega(x) \epsilon/2 + \bar{\epsilon}(x) \quad (5)$$

のように直交分解出来る。 $J(x)$ が微小なら、(4)式は満たされ、 $\varphi(x)$ の局所的単射性と向き保存 (orientation preserving)^{5)5.5} が保証される。

一方、 $u(x)$ が C^2 級なら、下の Poisson 方程式が成立つ。

$$\nabla^2 u(x) = g(x) = \nabla \cdot J(x) = \nabla \cdot F(x) \quad (6)$$

$J(x) \rightarrow u(x)$ が単射となり、凸領域 B の原点 $O \in B$ に対する Cesàro の変位場求積法の下式が一意的であるためには、

$$u(x) = u(rk) = u(O) + k \cdot \int_0^r J(sk) ds \text{ for } \forall k \in S^1 \quad (7)$$

不定成分 $\nabla \cdot J(x) = 0$ を排除し、下式が成立たねばならない。

$$\tilde{J}(x) = \nabla \times J(x) = \nabla \times F(x) = -\nabla \cdot \epsilon \cdot J(x) = 0 \quad (8)$$

つまり、Saint-Venant の歪場適合方程式ではなく、上式を満たさねばならない。上式は $\partial_i(\partial_j u_k) = \partial_j(\partial_i u_k)$ for $i \neq j$ と書けるので、偏微分の順序交換条件・Young の定理・Schwarz の可積分条件とも呼ばれる。弾性体 B に埋込まれた単純閉曲線を、弧長助変数 s で $C: c(s) \subset B$ と表現すると、 C の接線 vector 場は $c'(s) = \lambda(s) \in S^2$ で、 C は弾性変形に伴い $\hat{C}: \hat{c}(s) = \varphi(c(s)) = c(s) + u(c(s))$ に変形する。任意の単純閉曲線 C を境界とする曲面を Π 、即ち $C = \partial\Pi$ とすれば、 C 上の変位 vector 場 $u(c(s))$ の増分の周回積分は、Stokes の定理より、下式となる。

$$\oint_{c(s) \in C} \lambda(s) \cdot J(c(s)) ds = \int_{x \in \Pi} \tilde{J}(x) dS = 0 \quad \because \tilde{J}(x) = 0 \quad (9)$$

$\tilde{J}(x) = 0$ なら、積分経路 C に依らず周回積分は零となり、変形後の曲線 $\hat{C}$ も閉曲線で、弾性体 B に埋込まれた任意の単純閉曲線 C が、大域的にも破断・転位³⁾しないことを保証している。 $\varphi(x): x \rightarrow \hat{x}$ は大域的に単射とは言えず、 $\hat{C}$ も単純閉曲線とは必ずしも言えないが、局所的には、 $\hat{C}$ も単純閉曲線と言えるので、ambient isotropic な変形と看做せる。

このとき、 $\tilde{J}(x) : \epsilon = 0$ および $\tilde{J}(x) : I = 0$ より、下式

$$\nabla \cdot \bar{\epsilon}(x) = (2/3) \nabla e(x) - (1/2) \nabla \times \omega(x) \quad (10)$$

$$\therefore \nabla^2 u(x) = g(x) = \nabla \cdot J(x) = \nabla e(x) - \nabla \times \omega(x) \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \omega(x) = 0 \quad \because \bar{\epsilon}(x) : I = 0 \quad (12)$$

が導ける。この歪場 $\{e(x), \omega(x)\}$ は、(12)式の拘束を有し、独立な要素は 3 要素であり、変位 vector 場 $u(x)$ の独立な要素数と一致し、冗長性を持たない。(10)式は、 $\bar{\epsilon}(x) = 0$ を意味

せず、偏差歪 tensor 場 $\bar{\epsilon}(\mathbf{x})$ は $\{e(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{x})\}$ に従属し、勾配 $\{\nabla e(\mathbf{x}), \nabla \times \omega(\mathbf{x})\}$ が生ずる見掛けの歪場であることを表す。

Navier-Cauchy の運動方程式から、導かれる波動方程式

$$\ddot{e}(\mathbf{x}) = c_p \nabla^2 e(\mathbf{x}), \quad \ddot{\omega}(\mathbf{x}) = c_s \nabla^2 \omega(\mathbf{x}) \quad (13)$$

も、歪場 $\{e(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{x})\}$ が弾性 energy を伝搬することを示す。

3. 自己平衡応力場

古典的弾性論に従えば、外力場 $\{f(\mathbf{x}), t(\xi)\}$ に対し、応力 tensor 場 $\sigma(\mathbf{x})$ が存在し、境界閉曲面 ∂B の法線 vector を $\nu(\xi)$ とするとき、下式の平衡方程式を満たす。

$$-f(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{in } B \ni \mathbf{x} \quad (14)$$

$$t(\xi) = \nu(\xi) \cdot \sigma(\xi) \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (15)$$

正定値剛性 tensor を $\mathbf{C}$ とし、構成則 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{x})$ の存在を仮定すれば、(14)・(15)式を満たす解は一意的と Kirchhoff は主張した^{2) 118}が、柔性 tensor を $\mathbf{S}$ とする $\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{S} : \sigma(\mathbf{x})$ が普遍的弾性構成則であり、Stokes も指摘するように $\mathbf{S}$ は正則とは限らず、 $\mathbf{C}$ も存在するとは限らない。また、Beltrami の適合条件式^{4) 7, 3}も、 $t(\xi) = \mathbf{0}$ から $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ は導けない。

(12)・(13)式を3連立の偏微分方程式と Neumann 境界条件と看做せば、 $\sigma(\mathbf{x})$ の9 or 6要素は冗長で、解は不定となる。(14)・(15)式に含まれる自己平衡(self-equilibrated)応力場とは、下式を満たす成分 $\hat{\sigma}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ で、Kirchhoff が応力場一意性の背理法証明で用いた、異なる2解の差分に他ならない。

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } B \ni \mathbf{x}, \quad \nu(\xi) \cdot \hat{\sigma}(\xi) = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (16)$$

これを排除するためには、下式が成立たねばならない。

$$\nabla \times \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } B \ni \mathbf{x}, \quad \nu(\xi) \times \sigma(\xi) = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (17)$$

一方、 $\sigma(\mathbf{x})$ は(5)式と同様に、偏差応力 tensor 場を $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ とするとき、下式のように直交分解出来る。

$$\sigma(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \mathbf{I} / 3 + q(\mathbf{x}) \cdot \epsilon / 2 + \bar{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

$$\text{where } p(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) : \mathbf{I}, \quad q(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) : \epsilon \quad (18)$$

よって、 $(\nabla \times \sigma(\mathbf{x})) : \epsilon = \mathbf{0}$ および $(\nabla \times \sigma(\mathbf{x})) : \mathbf{I} = \mathbf{0}$ より、

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{x}) = (2/3) \nabla p(\mathbf{x}) - (1/2) \nabla \times q(\mathbf{x}) \quad (19)$$

更に、 $(\nu(\xi) \times \sigma(\xi)) : \epsilon = \mathbf{0}$ および $(\nu(\xi) \times \sigma(\xi)) : \mathbf{I} = \mathbf{0}$ より、

$$\nu(\xi) \cdot \bar{\sigma}(\xi) = (2/3) p(\xi) \nu(\xi) - (1/2) \nu(\xi) \times q(\xi) \quad (20)$$

$\therefore t(\xi) = p(\xi) \nu(\xi) - \nu(\xi) \times q(\xi),$

$$\nu(\xi) \cdot q(\xi) = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (20)$$

が成立ち、 $t(\xi) \rightarrow \{p(\xi), q(\xi)\}$ の一意的関係、下式も成立つ。

$$p(\xi) = \nu(\xi) \cdot t(\xi), \quad q(\xi) = \nu(\xi) \times t(\xi) \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (21)$$

このとき、(19)式は vector 場 $f(\mathbf{x})$ の Helmholtz 分解式となり(11)式に一致し、(20)式は vector $t(\xi)$ の直交分解式となる。

(19)・(20)式を満たし、応力 potential 場とも言える $\{p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})\}$ は、外力場 $\{f(\mathbf{x}), t(\xi)\}$ に対し一意的であり (Friedrichs 分解)、 $t(\xi) \leftrightarrow \{p(\xi), q(\xi)\}$ も双射の関係となる。

なお、応力場が対称 tensor 場 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma^T(\mathbf{x}) \therefore q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ とするなら、(14)・(15)式は、下式の“hydrostatique”に帰する。

$$-f(\mathbf{x}) = \nabla p(\mathbf{x}) \quad \text{in } B \ni \mathbf{x}, \quad t(\xi) = p(\xi) \nu(\xi) \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (22)$$

よって、応力 tensor 場の不定性、即ち自己平衡応力場成分の排除と偶応力場の排除は、相反し、両立しない。

4. 偶応力場

外力場が変位 vector 場 $u(\mathbf{x})$ を生じるまでに弾性体 B に成す仕事 U_B は、 $\{f(\mathbf{x}), t(\xi)\}$ と $u(\mathbf{x})$ が線型関係で、(19)・(20)式が成立てば、下式となり、弾性 energy として保存される。

$$U_B = \frac{1}{2} \int_{x \in B} f(\mathbf{x}) \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{\xi \in \partial B} t(\xi) \cdot u(\xi) dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x \in B} (p(\mathbf{x}) e(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x})) dV = \int_{x \in B} W(\mathbf{x}) dV \quad (23)$$

よって、下式の Hooke の法則が成立ち、

$$e(\mathbf{x}) = \kappa^{-1} p(\mathbf{x}) \quad \text{where } \kappa > 0,$$

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} q(\mathbf{x}) \quad \text{where } \lambda > 0, \quad \therefore \nabla \cdot \omega(\mathbf{x}) = \nabla \cdot q(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (24)$$

(3)式は下式となって、剛体回転を生じないことを保証する。

$$2 \int_{x \in B} q(\mathbf{x}) dV = 2 \lambda \int_{x \in B} \omega(\mathbf{x}) dV = \mathbf{0} \quad (25)$$

切断原理に従い、任意の部分領域 $B_p \subseteq B$ の境界面 ∂B_p 上に並進・偶 traction vector 場 $t(\xi) dS, m(\xi) dS$ on $\partial B_p \ni \xi$ が存在し、部分固体 B_p 上に作用する物体力場と平衡するとすれば、下式が成立つ。

$$\int_{x \in B_p} f(\mathbf{x}) dV + \int_{\xi \in \partial B_p} t(\xi) dS = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\int_{x \in B_p} x \times f(\mathbf{x}) dV + \int_{\xi \in \partial B_p} (\xi \times t(\xi) + m(\xi)) dS = \mathbf{0} \quad (27)$$

このとき、(20)式と同様な下式が成立てば、(26)式を満たす。

$$t(\xi) = p(\xi) \nu(\xi) - \nu(\xi) \times q(\xi) \quad \text{on } \partial B_p \ni \xi \quad (28)$$

更に、下式が成立つならば、(25)・(27)式を満たす。

$$q(\mathbf{x}) = \nabla \times m(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot m(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } B \ni \mathbf{x} \quad (29)$$

$$m(\xi) = -2 \nu(\xi) \times m(\xi) \quad \text{on } \partial B_p \ni \xi, \quad m(\xi) = m(\xi) = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial B \ni \xi \quad (30)$$

$$\therefore 2 \int_{x \in B_p} q(\mathbf{x}) dV + \int_{\xi \in \partial B_p} m(\xi) dS = \mathbf{0} \quad (31)$$

変位場 $u(\mathbf{x})$ を層状 vector 場成分 $u_p(\mathbf{x})$ と管状 vector 場成分に分解し、管状 vector 場成分を剪断変位成分 $u_q(\mathbf{x})$ と湾曲変位成分 $u_m(\mathbf{x})$ に分解すると、下式となる。

$$e(\mathbf{x}) = \nabla \cdot u_p(\mathbf{x}), \quad \omega(\mathbf{x}) = \omega_q(\mathbf{x}) + \omega_m(\mathbf{x}), \quad \omega_q(\mathbf{x}) = \nabla \times u_q(\mathbf{x}), \quad \omega_m(\mathbf{x}) = \nabla \times u_m(\mathbf{x}) \quad (32)$$

このとき、(28)~(30)式および(23)式の部分積分から下式、

$$2 W(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) e(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot \omega_q(\mathbf{x}) + m(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{x}) \quad (33)$$

where $\beta(\mathbf{x}) = \nabla \times \omega_m(\mathbf{x}) = -\nabla^2 u_m(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \beta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

が成立つので、下式の Hooke の法則が導ける。

$$\omega_q(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} q(\mathbf{x}), \quad \beta(\mathbf{x}) = \mu^{-1} m(\mathbf{x}) \quad \text{where } \lambda, \mu > 0 \quad (34)$$

よって、応力場 $\{p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), m(\mathbf{x})\}$ は弾性歪場 $\{e(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{x})\}$ の連続性を保証し、Poisson 方程式(33)の正則性に依り、偶応力場 $m(\mathbf{x})$ の連続性が $u_m(\mathbf{x})$ の滑らかさ C^2 級を保証する。

5. まとめ

抑も線形弾性論は、〈外力場→応力場→歪場→変位場〉の線型な因果関係を導くことで、〈応力場→外力場〉・〈変位場→歪場〉が一意的でも、逆が不定なら、線形弾性論は成立たない。Cauchy の応力場は、偶応力場を排斥することで、対称 tensor 場となり、不定性を孕むが、自己平衡応力場を排除すれば、静水圧場に帰する。即ち、応力場の不定性の解消と偶応力場の排斥は、二律背反し、両立しない。そこで、自己平衡応力場成分を含まない応力場と偶応力場に基づく、線型弾性論を示した。(なお、Cosserat 兄弟の偶応力理論から自己平衡応力場を排除すれば、本論に帰着する。)「静力学=vector」⇒「解析力学=scalar」と言う弾性論史、あるいは「有理力学：連続体=無構造」⇒「弾性=構成則」は、「弾性=柔性(力→変形)=幾何学」と言う視座を隠蔽している。

参考文献

- 1) 日本数学会編集：岩波 数学事典，第4版，岩波書店，2007。
- 2) Love A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (2nd Edition), Cambridge: at the University Press, 1906.
- 3) Kröner E.: Continuum Theory of Dislocations and Proper Stresses (Trans. by Delphenich D. H.), Springer Verlag, 1958.
- 4) Fung Y. C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965.
- 5) Ciarlet P. G.: Mathematical Elasticity Vol. 1: Three-dimensional Elasticity, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988.

光音響法で励起された超音波の指向性とビーム合成性能に関する研究 (シンポジウム講演概要)

Study on Directivity and Beam Forming Capability of Photo Acoustically Generated Ultrasonic Waves (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

木本 和志(岡山大・環境生命自然科学) 一水 信之介(岡山大・環境生命自然科学)
斎藤 隆泰(群馬大・理工学府)
Kazushi KIMOTO, Okayama University
Shin-nosuke ICHIMIZU, Okayama University
Takahiro SAITO, Gunma University
E-mail: kimoto@okayama-u.ac.jp

Photo acoustic (PA) ultrasonic generation has several advantages over conventional piezoelectric transducers. In the context of ultrasonic flaw detection, a notable potential advantage is the ability to excite ultrasonic beams from curved surfaces. To explore this possibility, directivity characteristics of photo acoustically generated ultrasonic beam are investigated in this study, using a sample with partially curved surface. It is found as a result that the PA generated ultrasonic beam deflects to the direction perpendicular to the surface where the beam is generated. Also shown is that the 6dB beam width is as broad as 30 to 40 degrees. It can thus be expected that the PA method is amenable for phased array beam forming for sub-surface flaw detection.

1. はじめに

超音波探傷試験は、鋼橋における疲労き裂の検出や評価に用いられている。鋼橋の超音波探傷試験では、通常、接触型の圧電トランスデューサ(探触子)が用いられ、探触子はカップラントを用いて対象物に密着させる必要がある。そのため、曲面や段差のある箇所での送受信は簡単ではなく、対象物の形状に合わせたシューに探触子をマウントすることや、シューの形状や素子配置を変化させることのできるアダプティブ探触子を用いる必要がある。一方、パルスレーザー照射によって超音波を励起する光音響法は、平坦でない箇所からも非接触で超音波を励起できる。疲労き裂が発生する溶接継手には溶接ビードの余盛りがあり、表面が平坦でない。そのような箇所でも光音響法を用いることができる。近距離からき裂や溶接欠陥に向けて強い超音波を送信できる可能性がある。しかしながら、光音響法は鋼橋の超音波探傷に用いられておらず、内部きずの探傷に適した超音波ビームを、曲面や傾斜した平面から入射できるかどうかは明らかでない。

このことを踏まえ本研究では、アブレーションモードの光音響法で励起した超音波の伝播状況を、溶接余盛りを模擬した試験体を用い透過波測定を行って調べた。本発表では、多点送信によるビーム合成において成否の鍵となる、個別送信点からの超音波が示す指向性について得られた知見を中心に報告を行う。

2. 実験方法

光音響法による透過波測定に用いた装置の構成を図1に、試験体の形状と寸法を図2(a)に示す。超音波の励起にはQスイッチNd:YAGレーザーを、受信にはレーザードップラー振動計(LDV:Laser Doppler Vibrometer)を用いた。YAGレーザーの波長は1,024nm、出力は20mJで、凸レンズを用い、試験体表面でスポット径が約1mmとなるようにして照射した。LDVの帯域は0.1Hz~20MHzで、十分な幅の周波数帯域が確保されている。試験体には、突き合わせ溶接継手の余盛りを模擬するために、半径14.5mmの円弧状の凸部を設けている。模擬余盛りの幅は20mm、高さは4mm

で、図2の奥行き方向は厚さ35mmで一様な断面形となっている。試験体は、加工が容易な真鍮を用いて作成し、フライス盤による切削とヤスリがけによる研磨で表面を成形した。試験体作成後は側面のスキャン画像を取得し、設計寸法と大きな差が無いことを確認した。また、比較のため、図2(b)に示す、大きさ100mm×25mm×35mmの真鍮ブロックを参照試験体として用いた。真鍮の弾性波速度は、別途、圧電探触子で測定したところ、P波速度は4.4km/s、S波速度は2.1km/sであった。以下、(a)を模擬余盛り試験体、(b)を参照試験体と称する。送受信点位置は、試験体底面の中央を原点とする xy 座標系で表す。ただし、受信点座標は $(x, y) = (x, 0)$ 、送信点座標は (x_s, y_s) と書いて互いに区別する。受信は試験体と送信位置によらず、一律に、 $|x| \leq 40\text{mm}$ (区間BB')において0.5mmピッチで行った。送信は、模擬余盛り試験体では $|x_s| \leq 12\text{mm}$ の区間AA'から、参照試験体では $x_s = 0\text{mm}$ からのみ行った。

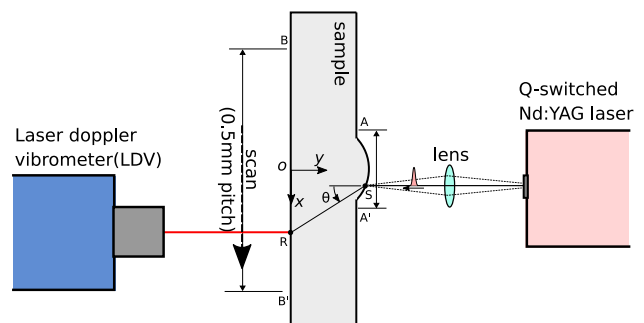


Fig. 1 Experimental setup for the photo acoustic ultrasonic transmission test

3. 実験結果

測定結果の一例を図3に示す。この図は、模擬余盛り中央($x_s = 0\text{mm}$)で超音波を励起した結果得られた走時波形である。横軸は時間 $t[\mu\text{s}]$ 、縦軸は測定位置 $x[\text{mm}]$ を表し、

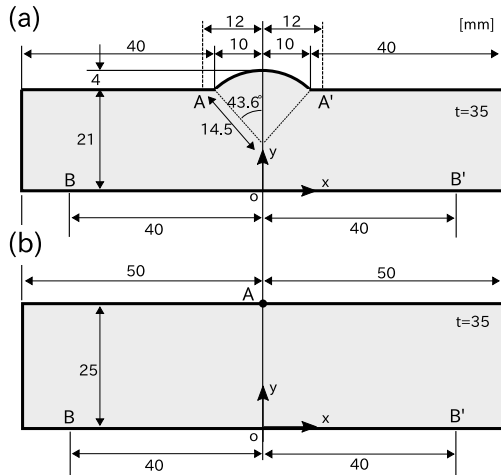
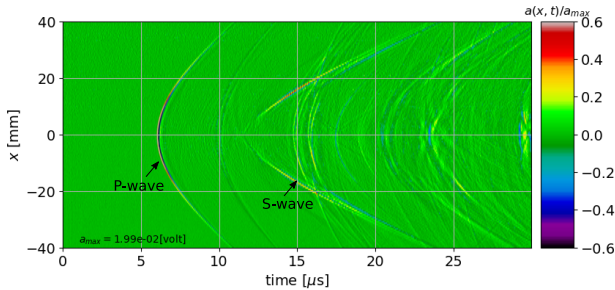


Fig. 2 Samples for the ultrasonic measurements

最大値で無次元化した振幅をカラー表示している．真鍮の弾性波速度から予想される時間と位置でP波とS波のパルスが明確に現れており，他にも，試験体の角部や上下面からの反射波が見られる．縦波は送信点直下で最も早く到達し，測定範囲全体 $|x| \leq 40\text{mm}$ に渡って観察されている．紙面の都合上，ここでは割愛するが，参照試験体でもよく似た走時波形が得られる．ただし，超音波の広がりや平面から送信を行った参照試験体でより大きく，最大振幅は模擬余盛り試験体 ($x_s = 0\text{mm}$) の方がやや大きい結果となった．以下，本稿では，模擬余盛りから送信を行った場合のP波の指向性に関する結果を示す．

Fig. 3 Travel-time plot for the measured waveforms (transmission from $x_s = 0\text{mm}$)

4. 指向性の評価

LDV 測定では，振動速度ベクトル v のレーザー照射方向成分 v_n が得られる．従って，送信点から観測点を見る方向を θ (図 1 を参照) とすれば， $|v| = v_n / \cos \theta$ の関係がある．また，点源からの弾性波は伝播距離 $r = y_s / \cos \theta$ に比例して振幅が低下する．これらの効果を補正し，超音波強度と伝播方向 θ の関係を調べるためには，LDV 測定で得られた波形に $y_s / \cos^2 \theta$ を乗じたものを用いればよい．ここで， (x_s, y_s) から送信し， $(x, 0)$ で受信した超音波の時刻歴波形を $a(x, t; x_s)$ と表す．これを，上の考えに基づいて補正し，その最大振幅

$$I(\theta; x_s) = \max_t \left\{ \frac{a(x, t; x_s)}{\cos^2 \theta} \right\} \quad (1)$$

を超音波強度として用いる．さらに，異なる送信位置に対

する結果を互いに比較するために，次のように規格化し，これを放射パターンと呼ぶことにする．

$$D_P(\theta; x_s) = \frac{I(\theta; x_s)}{\max_{\theta} \{I(\theta; x_s)\}} \quad (2)$$

図 4 は，このようにして推定した，P 波の放射パターンを示したものである．参照試験体に対する結果をみると， $D_P(\theta; 0)$ のピーク方向 θ_p は送信点直下にな， $\theta_p = -10^\circ$ 程度となっている．このことは，模擬余盛り中央 ($x_s = 0\text{mm}$) から送信した場合も同じで，YAG レーザーの強度が軸対象でなく空間的な偏りがあることが原因として考えられる．ただし，超音波ビーム軸をピーク方向 θ_p でなく， $D_P(\theta; x_s)$ を重みとした方向 θ の平均 $\bar{\theta}$ で評価すれば， $\bar{\theta} \approx 0$ となり，図 3 で P 波到達時間が $x = 0\text{mm}$ に関して上下対称であることと整合する．超音波の広がりや，参照試験体が模擬余盛りの場合よりもやや大きい．半値幅 (half width at half-maximum) $\Delta\theta_{6\text{dB}}$ で言えば，参照試験体は約 50 度，模擬余盛り試験体 ($x_s = 0\text{mm}$) で約 40 度となっている．この違いは，試験体表面の曲率の影響を受け，超音波が緩くフォーカスがかかったためと解釈できる．模擬余盛り試験体， $x_s = -4$ と -9mm の場合，半値幅はより小さくなるが，最低でも $\Delta\theta_{6\text{dB}} = 30$ 度程度と，P 波が広い範囲に伝わるのがわかる．ただし，これらのケースではビーム軸が $\theta > 0$ 方向に大きく傾き，概ね送信点位置の法線ベクトル方向に向へ強い超音波が向かう．

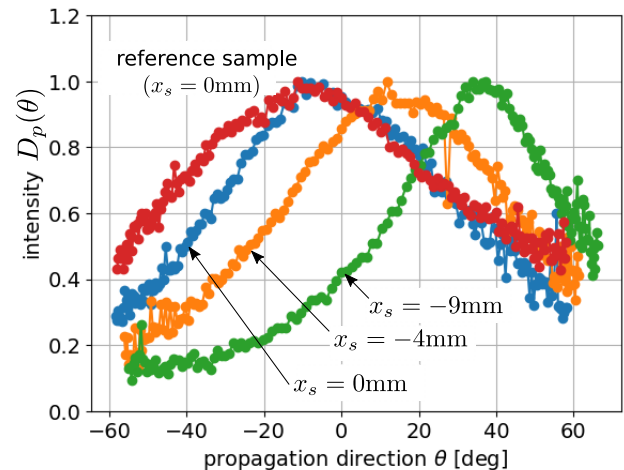


Fig. 4 Directivity of the photo acoustically generated ultrasonic P-wave.

5. まとめ

以上のように，光音響法による超音波励起では，試験体表面の曲率や傾きの影響を受け，ビーム幅やビーム軸方向が変化する．これは，一点からの入射では，期待する方向に強い超音波を送信できるとは限らないことを意味する．従って，光音響法を超音波探傷に用いる場合，表面形状と指向性の関係をよく理解した上で，多点送信によるビーム制御を行う必要がある．幸い，アブレーションモードでは，よく広がる強いP波を励起することができ，ビームフォーカシングやステアリングに加え，超音波イメージングにも利用し易いやすいと期待される．発表では，この観点を加え，光音響法で励起されたP波の指向性と，ビーム合成性能について調べた結果について報告する．

微小散乱源の解析に関わる量子論と古典論からのアプローチの比較 (シンポジウム講演概要)

Comparisons of the classical and quantum mechanics approaches to point-like scatterers (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

東平光生 (東京理科大学・創域理工学部)

Terumi TOUHEI, Tokyo University of Science

E-mail: ttouhei@rs.tus.ac.jp

The interaction effects of point-like scatterers is investigated in mathematical methods for the quantum and classical mechanics. We address the renormalization theory used in the quantum mechanics and observe that renormalization of coupling constant is also required in classical mechanics regime. We prove the strong convergence of the operator for the Dirac-type scatterers to the free Hamiltonian in the classical mechanics, where the interaction effects of the Dirac-type scatterers are disappeared. We observe that the Foldy algebraic equation in the classical mechanics regime remains valid in this limit process.

1. はじめに

量子論における波動関数は、量子の存在の確率密度関数として特徴づけられ、作用素に関しては observable として自己共役性が要請される。一方で、古典力学での波動場は、音響場などの物理的な意味が付与され、波動場の作用素は結果的に自己共役であることが多いと考えられる一方で、量子論のように始めから自己共役性が要請されるわけではない。量子論と古典論のこのような差異にも関わらず、古典論で音響場を扱う場合など量子論での方程式の構造と類似する場合がある。こうした意味で、量子論と古典論で、それぞれ展開されてきた数理の比較とその差異を考察することは意義があると考えられる。本稿では、この問題に関するいくつかの考察のポイントに言及する。

2. 微小散乱源の方程式と量子論からのアプローチ

本稿では、次の Dirac 散乱体による散乱問題を考える。

$$\left(-\Delta - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \omega^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) - k^2\right) p(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_F) \quad (1)$$

古典力学側からの描像で方程式について述べれば、 p は音響場の圧力としての意味を付与する。また、 ω は角振動数、 α は散乱源を識別するための番号でここでは散乱源の総数を N としている。また $m_{\alpha} \omega^2$ は coupling constant、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数 $\mathbf{r}$ は位置ベクトル、 $\mathbf{r}_F$ とは散乱源に波動を照射するための点源の位置、 Δ はラプラシアン、 k は媒質の波数である。

ここでは、この方程式を巡って、量子論ではどのようなことが言われているかを概観する。量子論での議論では p は量子の存在の確率密度関数関数として読み替える。式 (1) に現れる Dirac type の散乱源 (ポテンシャル) は Fermi pseudo potential¹⁾ の問題として定義される。主たる論点は、式 (1) に現れた作用素の逆

$$\left(-\Delta - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \omega^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) - k^2\right)^{-1} \quad (2)$$

は定義できないということである。この問題を解決するために coupling constant $m_{\alpha} \omega^2$ を再定義 (renormalization) することが必要である。さらに、この renormalization で得られた作用素が observable として自己共役性が要請される。限られた紙面でこの問題を論じることが不可能であり、結果のみ記述すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} (H - k^2)^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ = G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [\Gamma_{\theta}]_{\alpha\beta}^{-1} G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\alpha}) G_k(\mathbf{r}_{\beta}, \mathbf{r}'), \quad (\text{Im } k > 0) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに H は式 (1) の作用素の第 1 項と 2 項で coupling constant に renormalization を施し、さらに自己共役性を要請したものである。 G_k は free space の Green 関数

$$G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

$[\Gamma_{\theta}]_{\alpha\beta}$ は相互作用を表現する係数行列で

$$[\Gamma_{\theta}]_{\alpha\beta} = \begin{cases} \theta_{\alpha} - \frac{ik}{4\pi}, & \alpha = \beta \\ -G_k(\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\beta}), & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5)$$

ここに θ_{α} は

$$-\infty < \theta_{\alpha} \leq +\infty$$

を満足する任意のパラメータである。このように、作用素の自己共役拡張は唯一でなく無数に存在する。この任意パラメータの決定は数学の問題でなく物理の問題である²⁾。なお、renormalization された coupling constant は $\theta_{\alpha} - ik/(4\pi)$ で元の $m_{\alpha} \omega^2$ とは全く異なっている。

3. 古典論からみた微小散乱源の問題

Foldy(1945)³⁾ が提示した微小散乱源の相互作用方程式は量子論の問題よりもむしろ古典論での波動散乱問題への方法論と捉えられ、多くのアプリケーションの実績がある(例えば⁴⁾)。Dirac-type の散乱源の方程式 (式 (1)) に対しても、Foldy の方程式の適用事例は存在し、Hu and Sini⁽⁴⁾ は次式が相互作用の近似であるとする。

$$[\Gamma^{(F)}]_{\alpha\beta} p(\mathbf{r}_{\beta}) = G(\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_F) \quad (6)$$

ここに $[\Gamma^{(F)}]_{\alpha\beta}$ は Foldy の相互作用方程式の係数行列で

$$[\Gamma^{(F)}]_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ -m_{\alpha} \omega^2 G_k(\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\beta}), & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (7)$$

Hu and Sini と比較して Martin⁵⁾ は Dirac-type の散乱源の扱い、特に Green 関数の特異性と Dirac のデルタ関数の特異性が重なる相互作用には、式 (7) の適用には慎重である。Foldy の相互作用方程式が活躍する古典的な散乱理論では、

Dirac-type の散乱源への扱いに関しては、見解が分かれることもある。

ところで、式 (2) で述べた逆作用素が定義できない問題は量子論特有のものでなく、Dirac-type の散乱源を扱う場合の数学的な問題のはずである。古典力学の場で、この問題を検討するために、有限の support の散乱源からの極限以降のプロセスで Dirac-type 散乱源を捉え直す。出発点として、

$$\left(-\Delta - \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \omega^2}{(4/3)\pi a^3} X_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) - k^2\right) p(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_F) \quad (8)$$

を考える。ここに、散乱源は球と考え、 a はその半径である。また

$$X_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{when } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| \leq 1 \\ 0, & \text{when } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

である。式 (8) の左辺の第 1 項と 2 項からなる作用素は、Schrödinger 作用素における井戸 potential の議論⁶⁾ を参考にすることで、自己共役性を満足することが導ける。それにも関わらず、この方程式の解表現は、やや煩雑な計算ののち、coupling constant を再定義しなければならないという結果が出てくる。量子論での renormalization とは状況が異なるものの、古典場においても renormalization が必要となる。

式 (8) の逆演算子の表現は次式となる

$$\begin{aligned} (H_a - k^2)^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ = G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[\Gamma_a^{(F)} \right]_{\alpha\beta}^{-1} s_\alpha(a) G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\alpha) G_k(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 H_a は式 (8) の左辺の第 1 項と 2 項からなる作用素で renormalization を施したもので、添え字にスケールパラメータ a を明記した。また $s_\alpha(a)$ は renormalization を施した coupling constant で $m_\alpha \omega^2$ とは全く異なる形式となる。非常に煩雑な形式であるものの散乱源のスケールパラメータ a に比例する。即ち、

$$s_\alpha(a) \propto a \quad (11)$$

であり、決して $m_\alpha \omega^2$ には比例しない。また

$$\left[\Gamma_a^{(F)} \right]_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{when } \alpha = \beta \\ -s_\beta(a) G_k(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta), & \text{when } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (12)$$

式 (7) と (12) の比較で明らかなように両者の対角項は 1 であり、Foldy の提示した相互作用方程式は renormalization を施した方程式でも成立している。

式 (10) の表現は有限な空間 scale a の散乱源に対するものである。Dirac-type の散乱源がどのような性質を持つか、 $a \rightarrow 0$ の極限移行によって議論を行う必要がある。

まず、再定義された coupling constant で構成される $\Gamma_a^{(F)}$ に対しては次式が成立することを見るのは容易である。

$$\|I - \Gamma_a^{(F)}\| \rightarrow 0, \quad (a \rightarrow 0) \quad (13)$$

ここに、 I は単位行列である。式 (13) は十分小さな a に対して $\Gamma_a^{(F)}$ が逆行列を持つことを示す。さらに、任意の $\epsilon > 0$ に対して $a_0 > 0$ をとることで

$$1 - \epsilon \leq \|\Gamma_a^{(F)}\| \leq 1 + \epsilon, \quad (0 < a < a_0) \quad (14)$$

の一樣有界性も導ける。

次に $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ をとり、関数 g をを次のように定義する。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= \left(H_a - k^2 \right)^{-1} f - \left(-\Delta - k^2 \right)^{-1} f(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left[\Gamma_a^{(F)} \right]_{\alpha\beta}^{-1} s_\alpha(a) G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\alpha) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (15)$$

式 (14) の一樣有界性から実は

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0, \quad (a \rightarrow 0, \text{Im}(k) > 0) \quad (16)$$

が導かれる。この意味で式 (16) は

$$s\text{-}\lim_{a \rightarrow 0} \left(H_a - k^2 \right)^{-1} = \left(-\nabla^2 - k^2 \right)^{-1}, \quad (\text{Im}(k) > 0). \quad (17)$$

を意味する。ただし、 $s\text{-}\lim$ は強収束である。式 (8) を出発点として Dirac 散乱源を近似して散乱源の空間 scale を無限小に移行させる process では Foldy の相互作用方程式を保持しつつも、Dirac 散乱源の相互作用は消失する。この状況は量子論での renormalization における任意パラメータの選択において

$$\theta_\alpha = \infty \quad (18)$$

に対応する。

4. 結論

本稿では、微小散乱源の相互作用解析における数学的アプローチにおいて、量子論と古典論の対比を試みるとともに、Dirac type の散乱源の相互作用はどうあるべきかの考察を行った。この考察はあくまで、数学的アプローチに着目したものであり、散乱源の空間スケールが量子論の守備範囲かどうかを問題にしたものではない。本稿での検討によれば、量子論で Dirac-type の散乱源に対して coupling constant の renormalization が必要とされるように、古典場でも同様に coupling constant の renormalization が必要とされる。また、有限な空間 scale の散乱源の極限移行の結果、Dirac 散乱源の相互作用は、作用素の強収束の意味で消失する。以上の結果は多くの数値解析、特に結晶構造の解析などで、実績のある古典場のコミュニティには、意外な結果となる可能性がある。本稿の数学的考察の結果が、既存の多くの結果と調和的であることを実証することが今後の課題である。

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費 25K15150 のサポートを受けました。関係各位に感謝いたします。

参考文献

- 1) Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. and Holden, H. (1988). Solvable models in quantum mechanics, Springer-Verlag, (1988).
- 2) Reed and Simon, Method of Modern Mathematical Pyhisics, II (Fourier analysis and self adjointness), Academic Press, 1975.
- 3) The multiple scattering of waves I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers., Physical Review, 67, 107-119, 1945
- 4) Hu, G., and Sini, M. Elastic scattering by finitely many point-like obstacles, J. of Mathematical Physics, 54,042901, 32013
- 5) Martin, P.A., Multiple scattering, Interaction of time-harmonic waves with N obstacales, Cambridge University Press, 2006
- 6) 中村周, 量子力学のスペクトル理論, 共立講座 21 世紀の数学 26, 2012

ねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管のせん断遅れ理論 (シンポジウム講演概要)

Shear Lag Theory for CFRP-Bonded Steel Tubes Subjected to Torsional Moment

(Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

水谷 壮志 (関大・環) 伊佐治 響己 (関大・環) 石川 敏之 (関大・環)
 Morimune MIZUTANI, Kansai University
 Hibiki ISAJI, Kansai University
 Toshiyuki ISHIKAWA, Kansai University
 E-mail: mizutani@kansai-u.ac.jp

As a countermeasure against deterioration in steel signposts and lighting poles, bonding carbon fiber reinforced polymer (CFRP) is effective. The authors previously evaluated load transfer in CFRP-bonded steel tubes subjected to axial force and bending moment based on shear lag theory. However, pole bases and joints are also subjected to torsional moment. This study extends shear lag theory to CFRP-bonded steel tubes subjected to torsional moment. The derived equations agree well with finite element results.

1. はじめに

鋼製の標識柱や照明柱などの損傷の多くは腐食であり、基部、接合部や開口部などの不連続部に発生しやすい¹⁾。また、風による繰返し荷重により、疲労き裂も発生している。このような損傷への対策の一つとして、繊維強化樹脂 (FRP) を接着する方法がある²⁾。FRP は耐腐食性を有し、損傷部に接着剤で貼付するため、施工が容易である。特に、高強度・高弾性な炭素繊維強化樹脂 (CFRP) は、鋼桁などの補修においても利用されている²⁾。

筆者らは鋼管構造に CFRP を接着接合した際の、力の伝達をせん断遅れ理論により評価してきた³⁾。せん断遅れ理論は、鋼部材と CFRP の軸力または曲げモーメントを接着剤のせん断応力が伝達するとして理論モデルである。しかし、標識柱や照明柱の基部や接合部は曲げモーメントに加えて、ねじりモーメントも作用する。そこで、本研究ではねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管を対象に、せん断遅れ理論を適用し、力の伝達について評価する。

2. せん断遅れ理論に基づく CFRP 接着鋼管の分担ねじりモーメントおよび接着剤に生じるせん断応力

本研究では図 1 に示す CFRP 接着鋼管を対象とする。鋼管の全周に CFRP が接着されており、鋼管と CFRP で作用したねじりモーメントを分担する。図 2 に微小区間 dx における鋼管と CFRP のねじりモーメントおよび接着剤のせん断応力の模式図を示す。接着剤は鋼管と CFRP の周方向の変位差によりせん断応力が生じる。したがって、接着剤のせん断応力は次式で与えられる。

$$\tau_e(x) = G_e/h \cdot \{\lambda_s(x) - \lambda_c(x)\} \quad (1)$$

ここに、 x は CFRP 接着中央からの位置、 $\tau_e(x)$ は接着剤のせん断応、 G_e は接着剤のせん断弾性係数、 h は接着厚さ、 $\lambda_s(x)$ は鋼管外周の周方向変位、 $\lambda_c(x)$ は CFRP 内周の周方向変位である。

式(1)を x で微分することで次式を得る。

$$d\tau_e(x)/dx = G_e/h \cdot \{\gamma_s(x) - \gamma_c(x)\} \quad (2)$$

ここに、 $\gamma_s(x)$ は鋼管外周のせん断ひずみ、 $\gamma_c(x)$ は CFRP 内周のせん断ひずみである。ただし、接着厚さ h が大きい場合にも精度よくの接着剤のせん断応力を算出するために、鋼管および CFRP のせん断ひずみは次式のように接着厚さ中央の位置に外挿する³⁾。

$$\gamma_i(x) = (r_i + h/2) T_i(x) / (J_i G_i) \quad (i = s, c) \quad (3)$$

ここに、 $i = s$ は鋼管、 $i = c$ は CFRP の各部材を指し、 $T_i(x)$ は部材 i に生じるねじりモーメント、 r_i は部材 i の外周半

径、 J_i は部材 i の断面 2 次極モーメント、 G_i は部材 i のせん断弾性係数である。

図 2 に示す微小区間 dx の鋼管に対して、鋼管のねじりモーメント $T_s(x)$ と接着剤のせん断応力 $\tau_e(x)$ の力のつり合い式を変形し、次式が得られる。

$$dT_s(x)/dx = 2\pi(r_s + h/2)^2 \tau_e(x) \quad (4)$$

式(4)を x で微分し、式(2)、式(3)を代入し、整理することで、鋼管のねじりモーメント $T_s(x)$ に関する 2 階の微分方程式が次式で得られる。

$$d^2 T_s(x)/dx^2 - c_i^2 T_s(x) = -c_i^2 \xi_i T \quad (5)$$

$$c_i^2 = 2\pi G_e/h \cdot (r_s + h/2)^3 \cdot 1/\{J_s G_s (1 - \xi_i)\} \quad (6)$$

$$\xi_i = G_s J_s / (G_s J_s + G_c J_c) \quad (7)$$

式(5)の一般解は次式で得られる。

$$T_s(x) = C_1 \cosh(c_i x) + C_2 \sinh(c_i x) + \xi_i T \quad (8)$$

ここに、 C_1 と C_2 は未定係数である。接着中央で鋼管のねじりモーメントが対称となる条件 ($dT_s(0)/dx = 0$) より、 $C_2 = 0$ である。また、接着端部で鋼管のねじりモーメントが作用するねじりモーメントとなる条件 ($T_s(l) = T$) より、 $C_1 = (1 - \xi_i)T/\cosh(c_i l)$ である。

式(8)に未定係数 C_1 、 C_2 を代入して整理することで、鋼管のねじりモーメントが次式で表される。

$$T_s(x) = (1 - \xi_i) \{ \cosh(c_i x)/\cosh(c_i l) + \xi_i/(1 - \xi_i) \} T \quad (9)$$

CFRP のねじりモーメントは $T_c(x) = T - T_s(x)$ より、得られる。接着剤のせん断応力 $\tau_e(x)$ は式(4)に式(9)を代入して整理することで得られる。

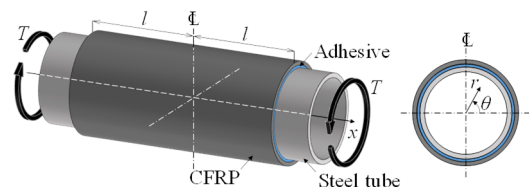


Fig. 1 CFRP-bonded steel tube under torsion moment.



Fig. 2 Force equilibrium of each member in an infinitesimal element dx .

3. ねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管のせん断応力分布

本章では、2章で導出したせん断遅れ理論に基づく理論式を用いたせん断応力の分布を示す。また、有限要素解析を実施し、理論式の妥当性を確認する。有限要素解析解析と比較するために、理論式の鋼管と CFRP の分担ねじりモーメントは、それぞれの外面のせん断応力へ変換する。また、CFRP 内のせん断遅れを考慮するために換算接着層厚 ($h' = h + t_c G_e / (3G_{12})$)⁴⁾ を使用した。

計算例とした寸法および材料特性を表 1 に示す。CFRP は±45°に繊維配向された直交異方性材料を想定している。有限要素解析モデルを図 3 に示す。解析要素は 8 節点 6 面体完全積分要素であり、それぞれの部材を厚さ方向に 4 分割、周方向は 2.5°ずつ、長手方向は 2.5 mm ずつ分割している。モデル左端は完全固定とし、右端にねじりモーメント $T = 0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ を与えた。

図 4 に各部材のせん断応力分布を示す。図の縦軸は各せん断応力を作用せん断応力 ($\tau_s = T r_s / J_s$) で無次元化しており、横軸は CFRP 接着中央からの位置 x を接着半長さ l で無次元化している。図 4(a) は鋼管および CFRP の外面のせん断応力分布であり、鋼管と CFRP とが完全合成として挙動する際の理論値も破線で示している。また、図 4(b) は、接着厚さ中央のせん断応力分布である。

図 4 より、理論式および有限要素解析の値がよく一致している。また、図 4(a) より接着端部から中央に向かって、理論式および有限要素解析のせん断応力が完全合成の値に収束している。さらに、図 4(b) より接着剤のせん断応力は接着端部で最大となる。

4. ねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管の定着長

他の CFRP 接着接合においても、図 4(a) のように接着端部付近は完全合成とならず、この範囲は補修・補強範囲の外側に定着長として確保する必要がある⁵⁾。したがって、ねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管においても、定着長を考える。接着半長さ l_n の CFRP を接着した際に、接着中央の鋼管のねじりモーメント $T_s(0)$ が任意の収束度 η 以下となるような条件から、定着長 l_n が次式で得られる。

$$l_n \geq 1/c \cdot \cosh^{-1} \left\{ 1/(\eta - 1) \cdot (1/\xi_1 - 1) \right\} \tag{10}$$

ここに、 η は 1 より大きく 1 に近い値である。文献 5) では、収束値に対して 1% の許容を設定し、 $\eta = 1.01$ としている。

3章の計算例において、 $\eta = 1.01$ として定着長を算出すると $l_n \geq 33.4 \text{ mm}$ であり、接着端部から 35 mm の位置 ($x/l = 0.65$) で完全合成の値に十分収束していることがわかる。

5. おわりに

本研究では、ねじりモーメントを受ける CFRP 接着鋼管を対象に、鋼管と CFRP のねじりモーメントおよび接着剤のせん断応力の理論式を示した。理論式は有限要素解析とよく一致した。また、定着長の算出式も示した。

参考文献

1) 宮原史, 桑原正明, 白戸真大: 道路附属物の損傷実態と安全性確保策, 日本風工学誌, 第 43 巻, 第 1 号 (通号 154 号), pp. 23-28, 2018.

2) 土木学会 複合構造委員会: FRP 複合構造の設計・維持管理に関する最新の調査報告, 複合構造レポート 20, 2023.

3) 石川敏之, 水谷壮志: CFRP 接着された鋼管の定着長とはく離に対するエネルギー解放率, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol. 77, No. 1, pp. 59-72, 2021.

4) 白井瑛人, 北根英雄, 石川敏之, 伊藤義人: 軸力が作用する CFRP 接着補修鋼板に対する CFRP 板のせん断変形を考慮した理論解析, 構造工学論文集 A, Vol. 61A, pp. 798-807, 2015.

5) 土木学会 複合構造委員会: 2024 年制定 複合構造標準示方書, 2024.

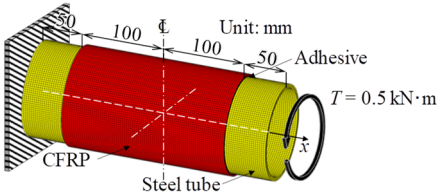
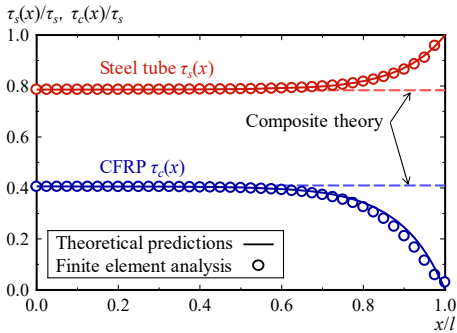


Fig. 3 Finite element model.

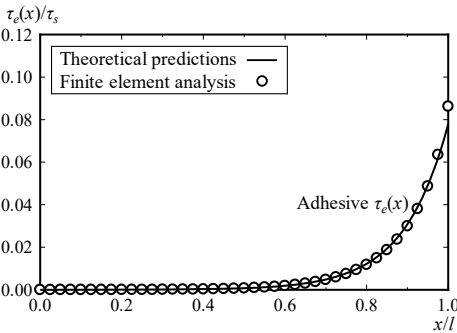
Table 1 Material properties and dimensions of each member.

	Steel tube	Adhesive	CFRP*
Young's modulus [GPa]	$E_s = 200$	$E_e = 2.500$	$E_1 = 2.847, E_2 = 3.591, E_3 = 3.591$
Poisson's ratio	$\nu_s = 0.300$	$\nu_e = 0.360$	$\nu_{12} = 0.016, \nu_{23} = 0.954, \nu_{31} = 0.020$
Shear modulus [GPa]	$G_s = E_s / \{2(1 + \nu_s)\} = 76.923$	$G_e = E_e / \{2(1 + \nu_e)\} = 0.919$	$G_{12} = 0.919, G_{23} = 37.770 (= G_c), G_{31} = 0.919$
Thickness [mm]	$t_s = 4.5$	$h = 1.0$	$t_c = 2.0$
Outside radius [mm]	$r_s = 57.15$		$r_c = r_s + h + t_c = 60.15$

* 1: radial, 2: tangential, 3: longitudinal directions.



(a) Outer surfaces of the steel tube and CFRP,



(b) Mid-thickness of the adhesive layer.

Fig. 4 Shear stress distribution in the CFRP-bonded steel tube.

大域参照勾配を用いた Hermite 族有限要素法による三次元橋梁モデル (シンポジウム講演概要)

Three-Dimensional Bridge Modeling Using the Hermite Family Finite Element Method with Global Reference Gradients (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

勝山 俊平 (筑波大) 山本 亨輔 (筑波大)
Shumpei KATSUYAMA, University of Tsukuba
Kyosuke YAMAMOTO, University of Tsukuba
E-mail: s2520872@u.tsukuba.ac.jp

To address Japan's bridge aging and labor shortages, this study develops a 3D simulation platform for vehicle-bridge interaction. Utilizing Hermite-family finite elements that share displacement and slope at nodes, alongside Kirchhoff-Love plate theory, the model balances efficiency and accuracy. A coordinate transformation method was introduced to manage spatial arrangements of members. Results confirm the method's utility as a prototype for simulating dynamic bridge behavior under traffic loads, establishing a framework for future accuracy enhancement.

1. 研究背景

橋梁の一斉老朽化が進む中で、交通振動データに基づいて橋梁構造を診断する技術^{1,2)}の開発が進められている。ただし、実橋で観測される交通振動データにはしばしば近接固有モードが卓越する。これは、橋梁の三次元的な構造において、片側の車線のみに交通荷重が作用し、ねじりモードを励起するためと考えられる。したがって、交通振動ベースの橋梁診断技術開発には、車両-橋梁相互作用系の三次元モデルに基づく数値シミュレーションが必要である。

しかし、一般的に三次元橋梁モデルの数値シミュレーションは計算負荷が高く、膨大な交通振動データから構造同定するには高精度かつ軽量の数値計算モデルが必要である。橋梁のように薄板構造を組み合わせた構造系を効率よく計算する方法として、既往研究では Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素³⁾の適用が検討されている。既往研究において、板要素の定式化に際し、要素形状や配置の組み合わせに起因した、要素境界における物理量の不整合が生じるといった課題があった。

物理量の不整合は幾何と場の双方に共通の基底関数を用いるアイソパラメトリック・エルミート要素の構築⁴⁾における幾何定義に局所パラメータ微分 $(\partial/\partial\xi)$ が、物理場に大域座標微分 $(\partial/\partial x)$ が混用されることに起因し、トポロジ的な不整合⁵⁾となっていた。ここで、大域参照微分を局所パラメータ微分に線形変換により直接反映可能なように定義する方法に着目し、大域参照勾配法として提案する。

本研究では、Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素をより汎化するため、大域参照勾配法を提案し、定式化を行う。得られた式に基づき構築された三次元橋梁モデルは、要素数を減らしながらも精度を維持して計算可能なため、従来の計算負荷を抑制しつつ、複雑な橋梁構造を精緻に表現することが期待できる。モデルの妥当性検証のため、車両走行に伴う交通荷重を模擬した振動に対する橋梁の三次元動的シミュレーションを実施し、橋梁の動的応答を再現した。

2. Hermite 族有限要素法

Hermite 族有限要素法は、節点において変位と勾配を共有する。本研究では、節点における勾配成分に変位の大域参照座標における導関数で定義する大域参照勾配を用いた。橋梁モデルが定義されている三次元直交座標系内の大域参照座標 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と幾何場 $\bar{\mathbf{x}}$ および変位場 $\mathbf{u}$ を定義すると、式(1)のように書ける。

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \quad (1)$$

節点 k において形状マッピングベクトルの成分 $\bar{\mathbf{x}}_i^k$ と数値解ベクトルの成分 $\mathbf{u}_i^k$ ($i = 1, 2, 3$) は、以下の式(2)となる。

$$\mathbf{X}_i^k = \begin{bmatrix} \bar{x}_i^k \\ \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_1}\right)^k \\ \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_2}\right)^k \\ \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_3}\right)^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_i^k = \begin{bmatrix} u_i^k \\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)^k \\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2}\right)^k \\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\right)^k \end{bmatrix} \quad (2)$$

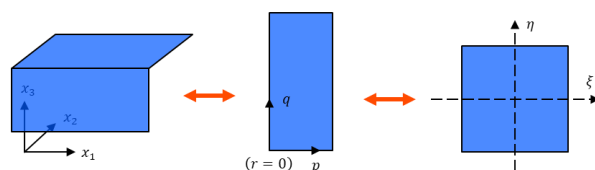
上記を定義により、橋梁の三次元的なモデルであっても座標変換の不整合を解消することで、一般的な計算順序により数値シミュレーションの実装が可能となる。

3. 座標変換

Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素 (H-KLP 要素) を用いてモデル化した床版、主桁および横桁で構成される橋梁では、三次元に組み合わせられた要素 (Fig.1 (a)) 間での共通節点において、自由度である変位と勾配は共有される。板の面内方向として p, q 軸を面外方向として r 軸を定義した基準座標系 (Fig.1 (b)) は、局所座標系として二次元正規化座標系 (ξ, η) の H-KLP 要素における親要素 (Fig.1 (c)) の線形変換によって得られる。さらに、基準座標系を回転変換することでモデルの直交座標である大域参照座標系と関連づける手法を大域参照勾配法として新たに導入した。すなわち、式(2)の導入により、Fig.1 の各要素間には勾配に用いる座標系を統一的に扱うことが可能となる。

4. 車両-橋梁モデル

車両は車体 (スプリング上) 重心の三次元座標と 4 つのばね下質点の垂直変位 (スプリング下) を考慮した 7 自由度 Full-Car モデルを扱う。(Table 1) 走行速度は 10 m/s とし



(a) Global (b) Rotational (c) Normalized

Table 1 Vehicle parameters			
symbol	name	unit	value
m_s	Body mass	kg	11406
m_{ui}	Unsprung mass	kg	435.000
c_{si}	Sprung mass	kg/s	1.590×10^4
c_{ui}	Unsprung damping	kg/s	4.000×10^6
k_{si}	Sprung stiffness	N/m	0.750×10^6
k_{ui}	Unsprung stiffness	N/m	1.380×10^6

Table 3 Concrete deck material parameters			
symbol	name	unit	value
E_s	Young's modulus	MPa	3500
ν	Poisson's ratio		0.25
L	Length	m	20.00
h	Height	m	5.50
t_g	Thickness	m	0.500

た．橋梁は4本の主桁と1本の横桁を弾性体ウェブ（Table 2）として，床板はコンクリート（Table 3）としてモデルのパラメータを設定した．橋梁の各パラメータは，鋼橋の試験設計データ⁹⁾を参考にした．橋梁の要素分割について，主桁は橋軸方向に3要素，鉛直方向に1要素，横桁は橋軸直角方向に主桁との交差点に対応して，3要素に分割した．また，床板は橋軸方向に10要素に分割した．これらは一般的なラグランジュ要素と比べ，比較的小さい．

これらの車両-橋梁モデルを用いて，4つの車輪の挙動を模擬した交通振動に基づく交通荷重に対する橋梁のたわみを再現するシミュレーションを行う．ただし簡便のため，本検討においては車両-橋梁相互作用系を考慮しない．

5. 結果と考察

シミュレーションの特定時刻における画像を Fig.2 に示す．この時刻の画像は，計算上において，特異な結果を意味しない．また，たわみが明確になるよう，可視化の際にたわみに20000倍の係数をかけているが，実際の値には影響しない．橋梁の片側を走行する車両による荷重に対し，推定される橋梁中点における節点のたわみは0.187mm程度であるところ，主桁中央部が最大0.192~0.195mmたわむ様子が再現された．本検討において，定式化に基づき構築されたモデルが，設定された条件において，妥当であることが確認された．これらの分割数は一般的なラグランジュ要素での分割と比較すると小さい為，モデルの車両-橋梁相互作用系や複雑な副構造を再現した橋梁モデルなど，より計算負荷の高い問題への適用可能性が示唆される．

6. まとめ

本研究では Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素をより汎化するため，大域参照勾配法を提案，定式化した．構築された三次元橋梁モデルは妥当性を検証するため，車両走行に伴う交通荷重を模擬した振動に対する橋梁の三次元動的シミュレーションを実施し，橋梁の動的応答を再現した．以下に知見を示す．

Fig.1 Coordinate system transformation

Table 2 Elastic web parameters			
symbol	name	unit	value
E_s	Young's modulus	MPa	20000
ν	Poisson's ratio		0.25
L	Length	m	20.00
h	Height	m	2.00
t_g	Thickness	m	0.04

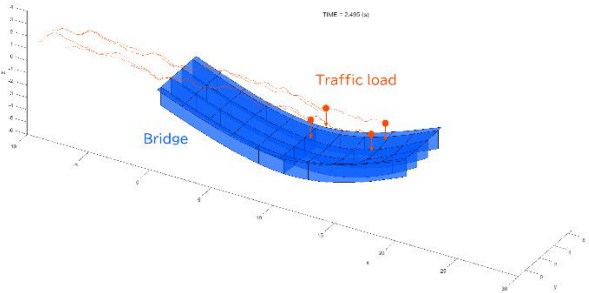


Fig.2 3D-simulation result (Perspective view)

- 1. 大域参照勾配法を適用した主桁，横桁および床板で構成された三次元橋梁モデルにおいてもたわみが再現された．
- 2. 要素数の少ない三次元橋梁モデルにおいてもたわみが再現されたことから，モデルの車両-橋梁相互作用系や複雑な副構造を再現した橋梁モデルなどのより計算負荷の高い問題への適用が示唆される．

今後の取り組みとして，車両-橋梁相互作用系や複雑な副構造を再現した橋梁モデルなどのより計算負荷の高い問題への適用が考えられる．また，大域参照勾配の導入により，幾何場と変位場の足し合わせを統合し，Hermite 要素のたわみとたわみ角の連続性を保証する複雑な過程が不要となったことから，より一般的な計算過程を保持することで，Hermite 族有限要素法の汎用性向上が期待される．

参考文献

1) R. Shin, Y. Okada, K. Yamamoto: Discussion on a Vehicle-Bridge Interaction System Identification in a Field Test, Sensors, 23(1), 539, 2023.

2) M.J. Whelan, M.V. Gangone, K.D. Janoyan, R. Jha: Real-time wireless vibration monitoring for operational modal analysis of an integral abutment highway bridge, Engineering Structures, 31(10), pp. 2224-2235, 2009.

3) J. Petera and J.F.T. Pittman: Isoparametric Hermite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, pp.3489-3519, 1994.

4) A. Beheshti: Novel Quadrilateral Elements Based on Explicit Hermite Polynomials for Bending of Kirchhoff-Love Plates, Computational Mechanics, 62, pp.1199-1211, 2018.

5) 勝山俊平，田口由得，澤原菜々子，後藤由佳，山本亨輔: Hermite 族適合要素による有限要素解析を用いた3次元橋梁モデルの検討，令和7年度土木学会全国大会第80回年次学術講演会，12PM2-Ae-16，熊本，2025.

6) 原隆，環境・都市システム教科書シリーズ15 鋼構造学，コロナ社，2007.