

## 一般セッション | 一般セッション (第二部門：計算力学)

2026年5月17日(日) 14:45 ~ 16:00 | 会場B(環境棟：3階講義室)

## 第2部門 (5)

座長:高瀬 慎介(八戸工業大学)

14:45 ~ 15:00

[22011] 津波波動場の即時予測のための観測情報の潜在表現学習に基づく Physics-Informed Neural Network (シンポジウム講演概要)

\*多田 瑛貴<sup>1</sup>、島内 宏和<sup>1</sup>、野村 怜佳<sup>2</sup>、外里 健太<sup>3</sup>、森口 周二<sup>2</sup>、寺田 賢二郎<sup>2</sup>、高瀬 慎介<sup>3</sup> (1. 公立はこだて未来大学、2. 東北大学、3. 八戸工業大学)

15:00 ~ 15:15

[22012] VM-SPH法による高粘性流体解析の効率化 (シンポジウム講演概要)

\*岡野 翔大<sup>1</sup>、森川 ダニエル<sup>2</sup>、浅井 光輝<sup>1</sup> (1. 九州大学、2. 同済大学)

15:15 ~ 15:30

[22013] Implicit ISPH法に基づく効率的な浸透流シミュレーション (シンポジウム講演概要)

\*高橋 和真<sup>1</sup>、辻 勲平<sup>1</sup>、浅井 光輝<sup>2</sup> (1. 東北大学、2. 九州大学)

15:30 ~ 15:45

[22014] Fast Runge-Kutta 法を用いた高精度・高効率なISPH 法 (シンポジウム講演概要)

\*井上 恵天<sup>1</sup>、辻 勲平<sup>1</sup>、浅井 光輝<sup>2</sup> (1. 東北大学、2. 九州大学)

15:45 ~ 16:00

[22015] 機械学習ウォームスタート予測子による陰的運動論ソルバーの高速化 (シンポジウム講演概要)

\*宿南 湧真<sup>1</sup>、安田 修悟<sup>1</sup>、Frank Martin<sup>2</sup> (1. 兵庫県立大学大学院 情報科学研究科、2. Karlsruhe Institute of Technology)

# 津波波動場の即時予測のための 観測情報の潜在表現学習に基づく Physics-Informed Neural Network (シンポジウム講演概要)

## Real-Time Tsunami Wavefield Prediction Using Physics-Informed Neural Network Based on Latent Representation Learning of Observation Data (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

多田 瑛貴 (公立はこだて未来大学) 島内 宏和 (公立はこだて未来大学)  
野村 怜佳 (東北大学) 外里 健太 (八戸工業大学) 森口 周二 (東北大学)  
寺田 賢二郎 (東北大学) 高瀬 慎介 (八戸工業大学)

Teruki TADA, Future University Hakodate  
Hirokazu SHIMAUCHI, Future University Hakodate  
Reika NOMURA, Tohoku University  
Kenta TOZATO, Hachinohe Institute of Technology  
Shuji MORIGUCHI, Tohoku University  
Kenjiro TERADA, Tohoku University  
Shinsuke TAKASE, Hachinohe Institute of Technology  
E-mail: b1022149@fun.ac.jp

Current real-time tsunami prediction largely relies on numerical simulations that solve discretized governing equations; however, achieving high accuracy requires computational resources. Recent machine-learning approaches predict only at discrete locations and do not enforce physical constraints. Someya and Furumura (2025, *Geophys. J. Int.*, 242(3)) demonstrated the potential of Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for estimating initial wavefields in a single-scenario setting; however, their framework requires retraining after each tsunami event and is not suited for rapid prediction. In this study, we propose a method combining an autoencoder for latent representations of observations with a PINN to generate tsunami wavefields across multiple scenarios.

### 1. 背景

現在の津波即時予測システムでは、有限体積法等のメッシュに基づく数値シミュレーションが広く用いられている。しかしながら、地震発生後にシミュレーションを行う場合、高精度な結果を迅速に得るにはスーパーコンピュータをはじめとする大規模な計算資源が必要となる。予測の迅速化や災害時の安定的な運用の観点からは、限られた計算資源で効率的に予測可能な手法が求められる。

事前計算された数値シミュレーション結果のデータベースを構築し、類似するシナリオを探索する手法が提案されている。Gusman らは、推定された津波源の情報に基づいてデータベースを探索し、小規模な計算資源を用いた高解像度の津波予測を実現した<sup>1)</sup>。また野村らは、ベイズ更新を用いて最も類似する津波シナリオを継続的に探索する手法を提案した<sup>2)</sup>。これらの手法では高速かつ物理法則に従う予測が可能である一方で、データベースに含まれないシナリオに対する汎化性能には限界がある。

近年、機械学習手法の一つであるニューラルネットワーク (NN) を用いた研究が進められている。Liu らは、ファンデフカ海峡における沖合の地点の時間波形を入力とし、セリッシュ海の複数の地点における時間波形の予測を出力とするモデルを、複数の機械学習手法を用いて構築し比較を行った<sup>3)</sup>。また牧野嶋らは、GNSS による測地データおよび沖合の観測情報を入力とし、陸上の浸水高の予測を出力とする、畳み込み NN に基づく手法を提案し、東北地方太平洋沖地震を対象とした数値実験で高い予測精度を示した<sup>4)</sup>。これらの手法では迅速に結果を得られ、事前に作成された学習データにない津波にも対応し得る一方で、予測は離散地点に留まり、モデルの学習や推論の過程において物理法則は考慮されていない。

物理法則を制約条件として組み込んだ NN である Physics-Informed Neural Network (PINN)<sup>5)</sup> の導入も検討されている。染矢と古村は、単一のシナリオにおいて、沖合の観測情報を用いて PINN を学習し、初期の津波波動場を推定する手法を提案した<sup>6)</sup>。同手法は計算コストが高いモデルの学習を地震発生後に行う必要がある。さらに、将来予測に用いる場合には別途数値シミュレーションが必要となる。

### 2. 目的

本研究では、事前計算された複数のシナリオのシミュレーション結果からなるデータセットを用いて、津波の観測情報を低次元の潜在表現へ圧縮する NN を構築し、PINN に接続することで将来も含む津波波動場を生成する手法を提案する。提案手法の全体像を図 1 に示す。潜在表現が津波シナリオの特徴を適切に捉えていれば、地震発生後にモデルを新たに学習することなく、学習データにない津波を含めた複数のシナリオ、および未観測の時間領域にも対応できる可能性がある。

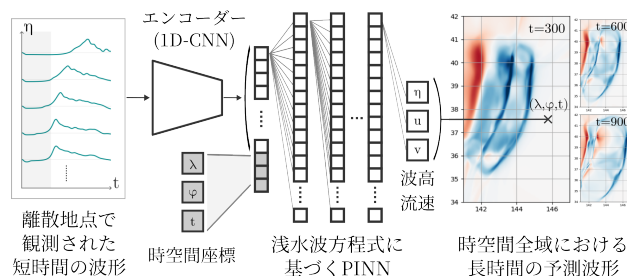


Fig. 1 提案手法の全体像。

3. 提案手法

本手法では、二つの NN を用いる。一方は観測情報の低次元な潜在表現を獲得するオートエンコーダーであり、もう一方はこの潜在表現および時空間座標を入力とし、対応する座標の波高と流速を出力する PINN である。オートエンコーダーの概要を図 2 に示す。オートエンコーダーは、エンコーダーとデコーダーの二つの NN から構成され、それぞれ 1 次元の畳み込み NN を用いて構成する。エンコーダーは各観測点の時間波形を入力として時間方向に圧縮・統合し潜在表現を出力する。デコーダーは潜在表現を入力とし、元の時間波形を再構成する。PINN は全結合型 NN と学習済みのエンコーダーの重みを凍結して連結し構成する。学習は、各シナリオのシミュレーション結果上の観測点およびランダムにサンプリングされた点における再現誤差と、浅水波方程式に基づく損失を組み合わせた目的関数を最小化することにより行う。

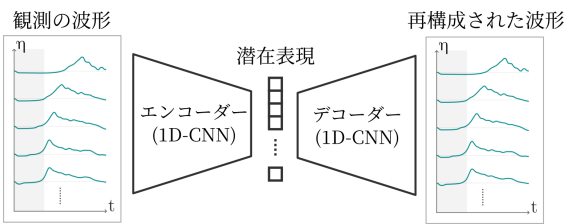


Fig. 2 オートエンコーダーのモデルの概要.

4. 実験と評価

本研究では、東北地方太平洋沖の地震を想定し、GeoClaw (<https://www.clawpack.org/geoclaw>) により生成した津波シミュレーションを用いてモデルを学習した。モデルの基礎的な性能を検証することを目的として、震源位置を東経 142 度 30 分～143 度、北緯 38 度～38 度 30 分の範囲に限定し、計 457 件のシナリオを用いた。321 件、68 件、68 件に分割し、それぞれ訓練、検証、テスト用データとして用いた。モデルの入力は、海底地震津波観測網 S-net の観測点における地震発生後 5 分間の時間波形とし、出力は 5 分後から 20 分後までの津波予測とした。評価指標としては、平均絶対誤差 (MAE) とバリエーション係数 (VR) を用いた。観測点である S-net、観測点に含まれない沖合のランダムな 500 地点、沿岸での全国港湾海洋波浪情報網 (NOWPHAS) の観測点での精度を評価に用いた。

5. 結果と考察

PINN の予測精度を表 1 に示す。観測点である S-net における VR は、学習データで 92.8%、テストデータで 87.9% であった。染矢と古村<sup>6)</sup> による類似実験では、観測時間内かつ単一シナリオを対象とした学習で VR は 93.7% と報告されており、本研究はテストデータにおいても近い値となった。また、提案手法は、地震発生後に追加の学習等を必要としない計算効率の高い予測が可能である。

観測点以外の地点では、沖合のランダムな 500 地点における VR は学習で 91.1%、テストで 87.5% となっている一方、沿岸部の地点で構成される NOWPHAS における VR は学習データにおいて 73.3%、テストにおいて 68.5% となり、相対的に低い精度となっている。沿岸部の地形は複雑であり、また反射波の影響などもあること等が要因の候補として上げられる。ランダムサンプリングにおいて沿岸部を優先する、損失に重み付けを施す等に対応できる可能性がある。

PINN のシナリオごとの S-net 観測点における MAE の分布を図 3 に示す。斜線ハッチの棒は学習データセットに対する MAE、点状ハッチの棒はテストデータセットに対する MAE を示す。双方において、極少数のシナリオでのみ MAE が著しく大きくなっていることが確認できる。今後は、ネットワーク・アーキテクチャを調整しつつ、12,000 件のシミュレーション結果を用いた学習を行うことで、東北地方太平洋沖地震を対象として、その多様な発生シナリオを広範に捉えることができるかを検証する。

Table 1 PINN の予測精度

| 観測点         | 指標         | 学習    | テスト   |
|-------------|------------|-------|-------|
| S-net (観測点) | 平均 MAE (m) | 0.101 | 0.142 |
|             | 平均 VR (%)  | 92.80 | 87.90 |
| 沖合 (500 地点) | 平均 MAE (m) | 0.085 | 0.109 |
|             | 平均 VR (%)  | 91.08 | 87.49 |
| NOWPHAS     | 平均 MAE (m) | 0.344 | 0.383 |
|             | 平均 VR (%)  | 73.30 | 68.50 |

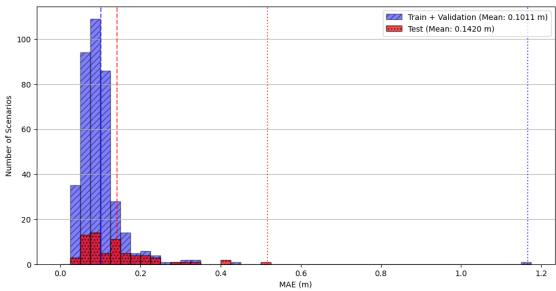


Fig. 3 各シナリオの PINN の MAE の分布 (S-net 上).

謝辞：本研究成果の一部は、大阪大学 D3 センターの大規模計算機システムを利用して得られたものです。

参考文献

1) A. R. Gusman *et al.*, A methodology for near-field tsunami inundation forecasting: Application to the 2011 Tohoku tsunami, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, 119, 8186–8206, 2014.

2) R. Nomura *et al.*, Sequential Bayesian Update to Detect the Most Likely Tsunami Scenario Using Observational Wave Sequences, *J. Geophys. Res.: Oceans*, 127(10), e2021JC018324, 2022.

3) C. M. Liu *et al.*, Comparison of Machine Learning Approaches for Tsunami Forecasting from Sparse Observations, *Pure Appl. Geophys.*, 178(12), 5129–5153, 2021.

4) F. Makinoshima *et al.*, Early forecasting of tsunami inundation from tsunami and geodetic observation data with convolutional neural networks, *Nat. Commun.*, 12, 2253, 2021.

5) M. Raissi *et al.*, Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, 378, 686–707, 2019.

6) M. Someya and T. Furumura, Physics-informed neural networks for offshore tsunami data assimilation, *Geophys. J. Int.*, 242(3), ggaf243, 2025.

# VM-SPH 法による高粘性流体解析の効率化 (シンポジウム講演概要)

## Accelerated high-viscosity flow simulation using VM-SPH

### (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

岡野 翔大 (九州大・工)    森川 ダニエル (同済大・工)    浅井 光輝 (九州大・工)  
 Shodai OKANO, Kyushu University  
 Daniel Morikawa, Tongji University  
 Mitsuteru Asai, Kyushu University  
 E-mail: s-okano@doc.kyushu-u.ac.jp

This study applies the VM-SPH method to highly viscous fluid analysis. In ISPH, explicit treatment of the viscous term requires extremely small time increments, and IISPH still requires small time increments due to splitting errors. VM-SPH adopts a fully implicit stabilized monolithic formulation, thereby eliminating both issues. Plane Poiseuille flow simulations demonstrate convergence to the analytical solution regardless of time increment, with speed-up of approximately 31 times over IISPH and 96 times over ISPH.

#### 1. 序論

Lagrange 記述によるメッシュフリーの粒子法は、領域の変形を粒子によって表現でき、個々の構成要素の移動を効果的に追跡することに優れていることから、流体-構造連成解析や相変化を伴う複雑な現象において多くの研究が進められてきた。代表的な手法として、SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法やその非圧縮性流体向けの応用である ISPH (Incompressible SPH) 法<sup>1)</sup> などが挙げられる。ISPH 法は、射影法に基づき支配方程式を分離したうえで、粘性項と外力項を陽的に、圧力項を陰的に解く半陰解法型時間積分を採用している。

しかしながら、ISPH 法には重要な課題がいくつか存在する。そのうちの 하나가、高粘性流体の扱いの困難さである。ISPH 法では粘性項を陽的に扱うことから、拡散に関する数値的安定性条件を満たす必要がある。そのため、高粘性流体を扱う場合は極めて小さな時間増分が要求され、その結果、著しく大きい計算コストを要する。また、支配方程式の分離に起因する分離誤差<sup>2)</sup> は、高粘性の場合に無視できない大きさとなる。例えば、土木工学の分野では、フレッシュコンクリートの充填解析などでこの課題は大きな技術的制約となる。

この課題に対し、完全陰解法型時間積分の IISPH (Implicit ISPH) 法<sup>3)</sup> が提案されている。IISPH 法は、速度求解と圧力求解を分離したうえで、それぞれを陰的に求解する手法であり、これにより合理的な計算コストでの数値計算が可能となる。しかし、分離誤差は依然として残る。

本研究では、より根本的な解決策として、速度-圧力一体型 SPH (VM-SPH: VMS-based monolithic SPH) 法<sup>4)</sup> を適用し、合理的な計算コストのもとで数値的安定と精度を両立した高粘性流体解析を試みる。

#### 2. 数値計算手法

本研究では、非圧縮性 Newton 流体を対象とする。支配方程式は、以下の Navier-Stokes 方程式と連続の式で記述される。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\nu$ ,  $\mathbf{g}$  はそれぞれ速度、密度、圧力、動粘度、単位体積当たりの外力である。式 (1), (2) に 1 次の

差分近似を適用し行列形式で書き換えると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t \nu \nabla^2 & \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \\ \nabla^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

ここで、 $\Delta t$  は時間増分である。

このとき、式 (3) の行列は強圧性を満たしておらず、解の一意性を喪失する。そこで VM-SPH 法では、VMS (Variational Multiscale) を導入し、物理量の間を解像スケールとサブスケールに分解する。解像スケールの速度と圧力を未知変数として式 (3) を書き換えると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \left(1 - \frac{\tau_1 \rho}{\Delta t}\right) \Delta t \nu \nabla^2 - \frac{\tau_2 \Delta t}{\rho} \nabla \nabla^\top & \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \\ \left(1 - \frac{\tau_1 \rho}{\Delta t}\right) \nabla^\top & -\tau_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{v}}^{n+1} \\ \bar{p}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{g} + \tau_1 \rho \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}^n \\ -\frac{\tau_1 \rho}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^n \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

ここで、 $\tau$  は時間増分や密度から定まる安定化パラメータ、 $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$  は速度と圧力の解像スケール成分である。この操作により強圧性が満たされるので、速度と圧力の同時求解が可能となる。

このとき、式 (4) は異なる次元 (運動量と質量) を連立させて解いている。密度、動粘度といった物理パラメータや、空間・時間の解像度といった計算パラメータの選び方によっては、VMS を導入してもなお固有値分布が悪くなる場合がある。そこで、本研究では式 (4) を解く際にブロック対角スケーリング前処理付き BiCGstab 法を用いている。

#### 3. 数値計算例

高粘性流体解析における時間増分の影響を検証するために、Fig. 1 に示す平面 Poiseuille 流れをシミュレーションする。流体の物理定数は密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  および動粘度  $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$  に設定した。計算条件は、時間増分  $\Delta t = 10^{-1} \sim 10^{-5} \text{ (s)}$ , SPH 粒子径  $d = 0.005 \text{ m}$  とした。初期条件として、速度および圧力はゼロに設定した。境界条件として、壁面に非滑りの Dirichlet 条件を、流入/流出境界に規定圧力の Dirichlet 条件を課す。ISPH 法および IISPH 法の場合は、圧力 Poisson 方程式を解くためにさらに壁面に圧力の

Neumann 条件を課す。

Fig. 2 に、流路中心の速度の時間発展を示す。Fig. 2(a) に示す ISPH 法の場合は、時間増分が十分小さい  $\Delta t = 10^{-4}$ 、 $10^{-5}$  s のケースのみで圧力 Poisson 方程式が収束し、その他の時間増分が大きいケースは発散した。これは、ISPH 法が半陰解法型時間積分を採用しており、粘性項を陽的に評価しているためである。Fig. 2(b) に示す IISPH 法の場合は、粘性項を陰的に評価するため時間増分に対して無条件安定となり、すべてのケースで計算を実行可能である。しかし、時間増分が十分小さいケースでは理論解に収束しているものの、分離誤差の影響で、時間増分が大きくなると理論解から乖離している。分離誤差は高粘性流れ問題で特に顕著となることが知られており<sup>2)</sup>、本例題においても分離誤差を低減するには時間増分を小さく設定する必要があることが確認された。一方、Fig. 2(c) に示す VM-SPH 法の場合は分離誤差が発生せず、全ての時間増分において理論解と一致する定常解に収束した。なお、計算初期において  $\Delta t = 10^{-1}$  s のケースがわずかにずれているが、これは初期速度ゼロから定常状態に至るまでの非定常な発展過程を粗い時間増分では詳細に追跡できないためである。重要な点は、VM-SPH 法は粗い時間増分においても最終的に正しい定常解に収束することである。

以上から、VM-SPH 法は直接法に基づく完全陰解法であるため、時間増分に対して無条件安定であり、かつ、分離誤差が発生しないことを確認した。したがって、対象とする現象の時間スケールに応じて時間増分を大きく設定可能であり、実用上の優位性が示された。例えば、本例題で相対誤差が 10%以下となる解を得るために必要な最大の時間増分は、ISPH 法では  $\Delta t = 10^{-4}$  s、IISPH 法では  $\Delta t = 10^{-4}$  s、VM-SPH 法では  $\Delta t = 10^{-1}$  s である。Table 1 に示す通り、この条件下での  $t = 1.00$  s までの総計算時間は、それぞれ

117.7 秒、37.7 秒、1.23 秒である。すなわち、IISPH と比較して 30.7 倍、ISPH 法と比較して 95.7 倍の高速化を達成した。

4. 結論

本研究では、ISPH 法における高粘性流体解析の諸問題を解決するため、VM-SPH 法を高粘性流体解析に適用した。基礎検討として実施した平面 Poiseuille 流れでは、数値的安定性・精度の観点から本手法が従来手法と比べて時間増分を大きくとることができ、その結果高効率な数値計算を実施可能なことを確認した。今後の展望としては、より実務的な工学問題への応用を目指し、二層流や非 Newton 流体に対しての拡張を進めていく方針である。

参考文献

- 1) Shao, Songdong and Lo, Edmond YM : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, Advances in water resources, Vol. 26, No. 7, pp. 787-800, 2003.
- 2) Perot, J Blair : An analysis of the fractional step method, Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp. 51-58, 1993.
- 3) Morikawa, Daniel and Asai, Mitsuteru and Idris, Nur' Ain and Imoto, Yusuke and Isshiki, Masaharu : Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method, Computational Particle Mechanics, Vol. 6, pp. 529-544, 2019.
- 4) 岡野翔大, 森川ダニエル, 葛宇甯, 浅井光輝 : 変分マルチスケール法による安定化を導入した速度-圧力一体型 SPH 流体解析, 計算工学講演会論文集 (Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science), Vol. 30, pp. 860-864, 2025.
- 5) Hughes, Thomas JR and Feijóo, Gonzalo R and Mazzei, Luca and Quincy, Jean-Baptiste : The variational multiscale method — a paradigm for computational mechanics, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 166, No. 1-2, pp. 3-24, 1998.

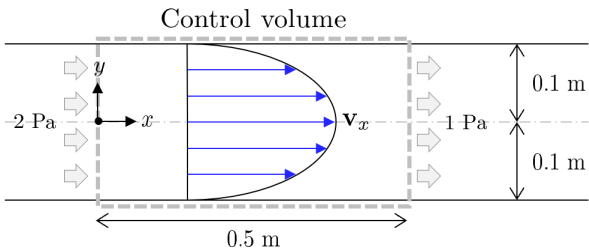


Fig. 1 Geometry of plane Poiseuille flow

| Table 1 Total computational time up to $t = 1.0$ s |             |             |             |             |             |
|----------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                                                    | $10^{-1}$ s | $10^{-2}$ s | $10^{-3}$ s | $10^{-4}$ s | $10^{-5}$ s |
| ISPH                                               |             |             |             | 117.7       | 1003.4      |
| IISPH                                              | 0.84        | 6.98        | 37.7        | 253.1       | 1773.3      |
| VM-SPH                                             | 1.23        | 6.30        | 18.3        | 163.5       | 1268.9      |

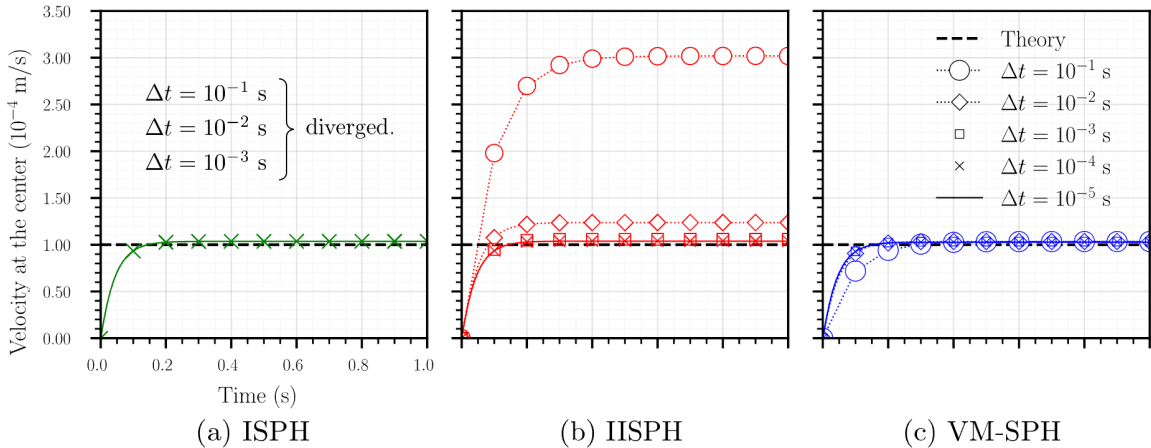


Fig. 2 Time history of x-direction velocity at the center

# Implicit ISPH 法に基づく効率的な浸透流シミュレーション (シンポジウム講演概要)

## Efficient Seepage Flow Simulation Based on the Implicit ISPH Method (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

高橋 和真(東北大・工) 辻 勲平(東北大・工) 浅井 光輝(九州大・工)

Kazuma TAKAHASHI, Tohoku University

Kunpei TSUJI, Tohoku University

Mitsuteru ASAI, Kyushu University

E-mail: takahashi.kazuma.p8@dc.tohoku.ac.jp

Conventional semi-implicit Incompressible SPH (ISPH) methods for simulating unified free-surface and seepage flows suffer from severe time-step constraints. To resolve this issue, this study applies the Implicit ISPH method to the Darcy-Forchheimer-Brinkman equation. This approach establishes a more stable numerical framework regarding time increments. In this study, the accuracy and validity of the proposed method are verified through 2D Poiseuille flow and numerical seepage flow experiments.

### 1. はじめに

近年、豪雨災害の増加に伴い、土砂災害による被害が頻発化、深刻化の傾向にある。特に、越水のような自由表面流れと堤体内部を流れる浸透流が複合的に作用する場合、堤体の侵食が促進され、決壊に至るケースが多い。このような現象の原因究明や対策工の検討において、浸透流解析は重要な役割を果たす。著者らは、粒子法 (SPH) による浸透流-地表流統一解析<sup>1)</sup>を適用してきたものの、実時間スケールでの長時間解析の実現には、時間刻みの制約による計算コストの増大と数値不安定性の解消が課題となる。

本研究では従来の Semi-Implicit ISPH 法よりも粗い時間増分で安定した解析が可能な Implicit ISPH 法<sup>2)</sup>を導入し、浸透流解析のさらなる効率化を目指す。本発表では、2次元 Poiseuille 流れや浸透流の数値実験を通して、提案手法の有用性と妥当性を検証する。

### 2. 計算手法

#### 2.1. 支配方程式

本研究では自由表面流と浸透流を統一的に記述可能な Darcy-Forchheimer-Brinkman (DFB) 方程式 (式 (1)) を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_D}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v}_D = \frac{\varepsilon_f}{C_r} \left\{ -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu_E \nabla^2 \mathbf{v}_D + \mathbf{f}_d + \mathbf{b} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{v}_D$ ,  $p$ ,  $\rho_f$ ,  $\mathbf{b}$  は Darcy 流速, 圧力, 流体密度, 物体力である。また、 $C_r$ ,  $\nu_E$ ,  $\mathbf{f}_d$  はそれぞれ仮想質量係数, 有効動粘性係数, 多孔質体から受ける抗力であり, 多孔質体の間隙率  $\varepsilon_f$  で決定される。特に、抗力  $\mathbf{f}_d$  は式 (2) に従う。

$$\mathbf{f}_d = -\alpha \frac{\nu_f (1 - \varepsilon_f)^2}{\varepsilon_f^3 D_{50}^2} \mathbf{v}_D - \beta \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f^3 D_{50}} |\mathbf{v}_D| \mathbf{v}_D \quad (2)$$

本研究では線形・非線形抗力係数として、Ergun モデル ( $\alpha = 150, \beta = 1.75$ ) を用いる。 $D_{50}$  は土粒子の平均粒径である。本検証では透水係数と平均粒径の関係を示す Kozeny-Carman 式により、抗力係数を透水係数  $K_h$  で表現する。なお、本研究では PSTs (粒子再配列法) を組み込むことを考慮し、ALE 記述の DFB 式を用いる<sup>1)</sup>。

#### 2.2. 従来法: Semi-Implicit ISPH 法

著者らは、DFB 方程式に対し、Semi-Implicit ISPH 法<sup>1)</sup>を適用してきた。この手法では、式 (1) を予測ステップ、修正ステップに分離し、速度を陽的に、圧力を陰的に算出する。

$$\begin{cases} \mathbf{v}_D^* = \mathbf{v}_D^N + \Delta t \left\{ \frac{\varepsilon^N}{C_r} (\nu_E \nabla^2 \mathbf{v}_D^N + \mathbf{b} + \mathbf{f}_d^N) - (\mathbf{c}^N \cdot \nabla) \mathbf{v}_D^N \right\} \\ \mathbf{v}_D^{N+1} = \mathbf{v}_D^* - \Delta t \frac{\varepsilon^N}{C_r} \left( \frac{1}{\rho_f} \nabla p^{N+1} \right) \end{cases} \quad (3)$$

この手法では速度更新が陽的に行われるため、時間刻み  $\Delta t$  が式 (4) の時間制約条件を満たす必要がある<sup>2), 3)</sup>。

$$\Delta t \ll \min \left( C_{\text{CFL}} \frac{h}{u_{\max}}, C_{\text{visc}} \frac{h^2}{\nu}, C_{\text{fd}} \frac{K_h}{\varepsilon \|g\|} \right) \quad (4)$$

ここで、 $h$ ,  $u_{\max}$ ,  $K_h$  はそれぞれ平滑化長, 最大流速, 透水係数である。透水係数が小さい場合、式 (4) の第 3 項が支配的となり、極めて小さい時間刻みが要求される。

#### 2.3. Implicit ISPH 法の適用

本研究では、Implicit ISPH 法<sup>2)</sup>を DFB 方程式に適用することで、時間刻みの制約を緩和し、浸透流解析の効率化を図る。ここで、DFB 方程式内の粘性項および抗力項における仮速度  $\mathbf{v}_D^*$  を用いて表し、これを陰的に求める。すなわち、式 (3) の予測ステップを式 (5) に置き換える。

$$\mathbf{v}_D^* = \mathbf{v}_D^N + \Delta t \frac{\varepsilon^N}{C_r} (\nu_E \nabla^2 \mathbf{v}_D^* + \mathbf{b} + \mathbf{f}_d^*) - (\mathbf{c}^N \cdot \nabla) \mathbf{v}_D^N \quad (5)$$

ただし、抗力項  $\mathbf{f}_d^*$  の非線形項を反復法を用いて算出するのは計算コストが高いため、式 (6) のように線形化を施す。

$$\mathbf{f}_d^* = \left( -\alpha \frac{\nu_f (1 - \varepsilon_f)^2}{\varepsilon_f^3 D_{50}^2} - \beta \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f^3 D_{50}} |\mathbf{v}_D^N| \right) \mathbf{v}_D^* \quad (6)$$

### 3. 粘性項・抗力項の陰的算出の有効性検証

#### 3.1. 粘性項の陰的算出の有効性: 2次元 Poiseuille 流れ

まず、異なる時間増分  $\Delta t$  で 2次元 Poiseuille 流れを用いて Implicit ISPH 法による粘性項の陰的計算の検証を行う。解析モデル Fig. 1 に、定常状態の速度分布  $u(y)$  と平均流速  $\hat{U}$  の理論解を式 (7) に示す。なお、解析では定常時の平均流速が 5.0 cm/s となるよう物体力を設定した。

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy); \quad \hat{U} = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (7)$$

$$\Delta t \ll \min \left( C_{\text{CFL}} \frac{h}{u_{\max}}, C_{\text{visc}} \frac{h^2}{\nu} \approx 1.6 \times 10^{-3} \right) \quad (8)$$

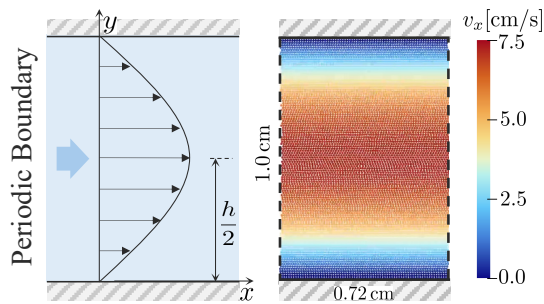


Fig. 1 2D poiseuille flow model and simulation results

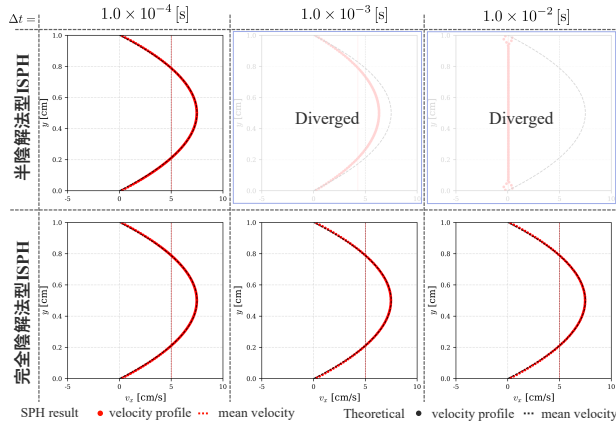


Fig. 2 Velocity profiles at different time increments

Fig. 2 に各時間増分による Semi-Implicit ISPH 法と Implicit ISPH 法による解析結果をそれぞれ示す。速度のプロファイル点を、平均流速を鎖線で示し、理論解を黒、解析結果を赤色にて示す。  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$  s では両手法とも理論解と良好に一致したが、Semi-Implicit ISPH 法では時間増分を大きくすると数値発散が生じた。具体的には、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$  s では動粘性係数に基づく制約を、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  s では流速増大に伴い速度に基づく制約を満たさなくなったことに起因する (式 (8))。一方 Implicit ISPH 法による解析は、実施した全ての時間増分で解析が可能でかつ理論解と一致しており、時間制約に対する堅牢性と有用性が確認された。

### 3.2. 抗力項の陰的算出の有効性: 浸透流の数値実験

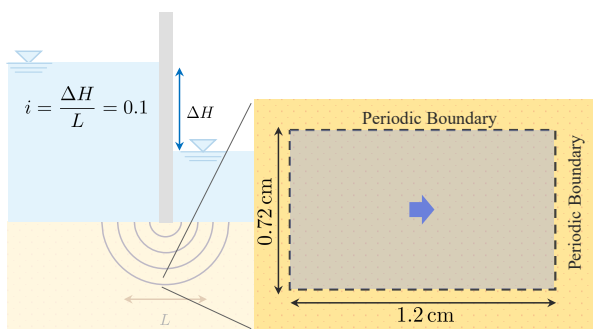


Fig. 3 Numerical experiment model for seepage flow

次に、抗力項の陰的算出の有効性を検証するため、Fig. 3 に示すモデルを用いて浸透流解析を行う。本解析では動水

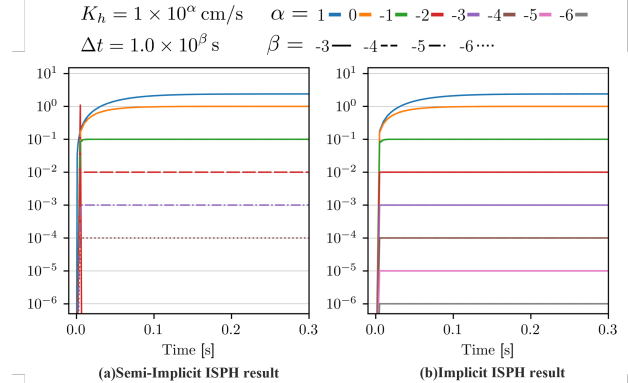


Fig. 4 Numerical experiment results for seepage flow

勾配  $i = 0.1$  に相当する物体力  $\mathbf{b}$  を作用させ、周期境界条件および粘性項無視の仮定を適用する。この条件下では、定常状態において物体力と抗力が釣り合うため、流速は理論上、透水係数  $K_h$  に収束すると考えられる。以上を踏まえ、時間増分と透水係数を変化させた複数の条件下で解析を実施し、提案手法の有用性を検証する。

Fig. 4 (a) に Semi-Implicit ISPH 法の、(b) に Implicit ISPH 法の解析結果を示す。各透水係数による結果を線の色で区別し、各時間増分における結果を線種で区別する。高透水係数領域では両手法とも概ね透水係数値に収束したが、最も高い  $K_h = 1.0 \times 10^{-2}$  m/s の場合において、流速増大に伴う非線形抗力の影響によって理論値からの乖離が見られた。なお、この傾向は両手法に共通している。一方で透水係数が低い領域では、Semi-Implicit ISPH 法は時間制約が厳しくなり数値発散が生じた。一方、Implicit ISPH 法は、いずれの透水係数においても発散せず安定して収束しており、その妥当性と有用性が確認された。

### 4. 結言

本研究では、浸透流解析の効率化を目指し、DFB 方程式に対して粘性項および抗力項を陰的に取り扱う Implicit ISPH 法を適用した。2 次元 Poiseuille 流れおよび浸透流の数値実験の結果、従来法では数値発散が生じる大きな時間増分や低い透水係数の条件下においても、本手法は安定して理論解・設定値に収束し、粘性項や透水係数によって決まる時間制約条件を大幅に緩和できることが確認され、計算コストと数値安定性の課題を解決する高効率な浸透流解析手法として有用である。今後の展望として自由表面領域を含むような実験との比較・検討を通して本手法の妥当性を確認する予定である。

### 参考文献

- 1) K.Tsuji, S.Fujioka, D.S.Morikawa, M.Asai : A reliable SPH (2) formulation for Darcy–Forchheimer–Brinkman equation using a density-based particle shifting in the ALE description. *Comput. Part. Mech.*, pp. 1–29, 2024.
- 2) D.S.Morikawa, M.Asai, N.Idris, Y.Imoto, M.Isshiki : Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method. *Comput. Part. Mech.*, Vol. 6, pp. 529–544, 2019.
- 3) D.S.Morikawa, M.Asai : Soil-water strong coupled ISPH based on u-w-p formulation for large deformation problems. *Comput. Geotech.*, Vol. 142, pp. 104570, 2022.

## Fast Runge-Kutta 法を用いた高精度・高効率な ISPH 法 (シンポジウム講演概要)

### A Highly Accurate and Efficient ISPH Method via the Fast Runge-Kutta Method (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

井上 恵天(東北大・工) 辻 勲平(東北大・工) 浅井 光輝(九州大・工)

Yoshitaka INOUE, Tohoku University

Kumpei TSUJI, Tohoku University

Mitsuteru ASAI, Kyushu University

E-mail: inoue.yoshitaka.r8@dc.tohoku.ac.jp

Time integration in Incompressible SPH (ISPH) is typically limited to first-order accuracy, and high-order Runge-Kutta (RK) methods are computationally expensive due to repeated the Pressure Poisson Equation (PPE) solving. To overcome this issue, we introduce the Fast Runge-Kutta (FRK) methods into the Transport Eulerian ISPH (TE-ISPH) framework. The FRK methods reduce the multiple PPE solves of RK methods to just one at the final stage. The results confirm that the FRK method achieves numerical stability comparable to RK methods at no greater computational cost than conventional first-order schemes, thereby improving computational efficiency.

#### 1. はじめに

SPH 法等の粒子法はメッシュフリーの特性から大変形解析に有効だが、従来の非圧縮性 SPH (ISPH) 法は時間積分が 1 次精度に留まり、数値的な厳密性に課題があった。

時間高次精度化に Runge-Kutta (RK) 法を適用する場合、非圧縮性流体解析では段数分だけ計算負荷の高い圧力 Poisson 方程式 (PPE) を解く必要があり、計算コストの増大が実用上の障壁となっていた<sup>1)</sup>。

そこで本研究では、格子法で近年提案された Fast Runge-Kutta (FRK) 法<sup>2)</sup>に着目した。FRK 法は中間ステージの圧力を過去の値から近似評価し、PPE の求解を最終段の 1 回に限定しつつ高次精度を維持できる。本研究はこの FRK 法を粒子法へ導入する。特に、計算点の移動と速度更新を分離する<sup>3)</sup>Transport Eulerian ISPH (TE-ISPH) 法へ適用し、通常の時間 1 次精度手法と同等の低コストで高精度化を達成する高効率な解析フレームワークの確立を目指す。

#### 2. 支配方程式と TE-ISPH 法

##### 2.1. 支配方程式 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian 記述)

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、以下の質量保存則および運動量保存則で記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は流速、 $p$  は圧力、 $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$  は相対速度、 $\mathbf{w}$  は任意の輸送速度、 $d\mathbf{v}/dt$  は ALE 微分を表す。

##### 2.2. TE-ISPH 法のアルゴリズム

本研究で採用する TE-ISPH 法は、速度の更新と位置の更新を分離する手法である<sup>3)</sup>。速度更新時には計算点 (粒子) を固定 ( $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ) して Euler 記述による支配方程式を解き、その後に粒子を移動させる点にある。これにより、移動粒子系特有の複雑な幾何学的補正を回避している<sup>3)</sup>。

時間 1 次精度の陽的 Euler (EE) を用いた TE-ISPH 法の具体的な計算アルゴリズムは以下の通りである。

- **速度更新:** 計算点を現在の位置  $\mathbf{x}^n$  に固定し ( $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ )、仮速度  $\mathbf{v}^*$  の計算、圧力 Poisson 方程式 (PPE) の求解、

および新時刻の速度  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1}$  の算出を行う。

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t (\nu \nabla^2 \mathbf{v}^n + \mathbf{g} - (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n) \quad (3)$$

$$\nabla^2 p_{\mathbf{x}^n}^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p_{\mathbf{x}^n}^{n+1} \quad (5)$$

- **位置更新とリマッピング:** 得られた流速  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1}$  と粒子配置の均一化のための粒子シフト  $\delta \mathbf{r}$  を用いて粒子位置を更新し、新しい位置  $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta \mathbf{r}$  へ移動させる。その後、粒子移動に伴う物理量のズレを補正するため、2 次項までの Taylor 展開を用いて物理量を新位置  $\mathbf{x}^{n+1}$  へ再配置 (リマッピング) する。ここで、 $\Delta \mathbf{r} = \Delta t/2 \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^n + \mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1}) + \delta \mathbf{r}$  である。

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}^{n+1}}^{n+1} \approx \mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1} + \sum_{m=1}^2 \frac{1}{m!} (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla)^m \mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1} \quad (6)$$

#### 3. TE-ISPH 法の時間積分の高精度化

##### 3.1. Runge-Kutta 法による TE-ISPH 法

時間積分の高精度化を目的として、2 段 Runge-Kutta 法 (RK2)<sup>1)</sup> を TE-ISPH 法に適用する。 $\tilde{a}_{i,j}$ ,  $\tilde{c}_i$  は RK 法の係数である。アルゴリズムは以下の通りである。

- **第 1 ステージ (仮速度と PPE):**

$$\mathbf{v}_{(1)}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t \tilde{a}_{1,0} \mathbf{F}(\mathbf{v}^n), \quad (7)$$

$$\nabla^2 p_{(1)} = \frac{\rho}{\tilde{c}_1 \Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}_{(1)}^*, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{v}_{(1)}^* - \frac{\tilde{c}_1 \Delta t}{\rho} \nabla p_{(1)}. \quad (9)$$

- **第 2 ステージ (最終速度の決定):** 第 1 ステージの結果を用いて再度仮速度を計算し、PPE を解いて最終速度  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}^n}^{n+1}$  を求める。通常の RK 法では、各ステージで PPE を解く必要があり、その計算コストが大きい。
- **位置更新とリマッピング:** 得られた速度に基づいて粒子位置を更新する。粒子移動に伴う物理量の不整合を補正するため、2 次の Taylor 展開を用いて速度および圧力を新位置  $\mathbf{x}^{n+1}$  に再配置する。

3.2. Fast Runge-Kutta (FRK) 法の適用

通常の RK 法ではステージ数と同数の PPE 求解が必要である．一方，格子法で提案された FRK 法<sup>2)</sup>は，中間ステージの圧力を既知の圧力から近似することで，PPE の求解を最終ステージのみに限定する手法である．  
本研究ではこの FRK 法を TE-ISPH 法に適用する．2 段 FRK (FRK2) 法と通常の RK 法の主な違いは以下の通りである．

- ・第 1 ステージ: 中間圧力を  $p_{(0)} \approx p^n$  と近似し，PPE を解かずに圧力勾配項を評価して中間速度  $\boldsymbol{v}_{(1)}$  を求める．
- ・第 2 ステージ (最終段): 非圧縮条件を満たすため，この段階で PPE を解き最終速度を決定する．これにより，RK 法と同様の時間精度を維持しつつ，PPE の求解回数を 1 ステップあたり 1 回に削減できる．

4. 数値検証

提案手法の精度と効率を検証するため，非圧縮性流体解析のベンチマークである 2 次元 Taylor-Green Vortex (TGV) 問題を用いた．空間 2 次精度を示す SPH(2)<sup>4)</sup> を用いている．

4.1. 問題設定と評価指標

計算領域を  $[-L, L] \times [-L, L]$  の正方形領域とし，全周に周期境界条件を適用する．速度場  $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$  および圧力場  $p$  の厳密解は以下の通りである．

$$v_x = U \exp \left( -2\nu k^2 t \right) \sin (kx) \cos (ky)$$

(10)

$$v_y = -U \exp \left( -2\nu k^2 t \right) \cos (kx) \sin (ky)$$

(11)

$$p = \frac{\rho U^2}{4} \exp \left( -4\nu k^2 t \right) \{ \cos (2kx) + \cos (2ky) \}$$

(12)

ここで，波数  $k = \pi/L$ ，代表長さ  $L = 1 \text{ m}$ ，密度  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ，動粘性係数  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ，代表速度  $U = 1 \text{ m/s}$  と設定した (レイノルズ数  $Re = 1000$ )．定量的な評価指標として相対誤差ノルム  $L_2$  を用いる．

4.2. 検証結果と考察

**誤差評価:** 初期粒子間隔  $\Delta x = 2^{-6} \text{ m}$  を固定し時間収束を検証した．TE-ISPH 法は従来 ISPH 法に比べ，速度誤差を約 2 オーダー低減した (Fig.1(a))．一方，圧力誤差は時間刻みに対してほぼ一定であり，空間誤差が卓越していることが確認された (Fig.1(b))．

**リマッピング誤差の影響:** 移動粒子解析では， $\Delta t$  を小さくするほど Taylor 補間による累積誤差が増大した ( $\Delta t < 1/5120 \text{ s}$ , Fig.1(a))．RK 法，FRK 法を導入しても補間誤差が卓越し，精度向上は限定的である．

**FRK アルゴリズムの性能評価:** Reynolds 数 ( $Re = 1000$ ) 条件下において，提案手法は陽的 Euler (EE) 法と比較して約 4 倍大きな時間刻み  $\Delta t$  で安定計算が可能であり (Fig.2)，安定領域の大幅な拡大を確認した．これは高次時間積分の導入により数値的不安定性が効果的に抑制されたことを示している．さらに，Table 1 に示す通り，FRK 法 (FRK2) の計算コストは従来の 1 次精度手法の約 1.2 倍に留まり，RK 法 (約 1.7 倍) と比較しても計算効率に優れる．以上より，本手法は安定性向上と計算効率の両立を実現していることが示された．

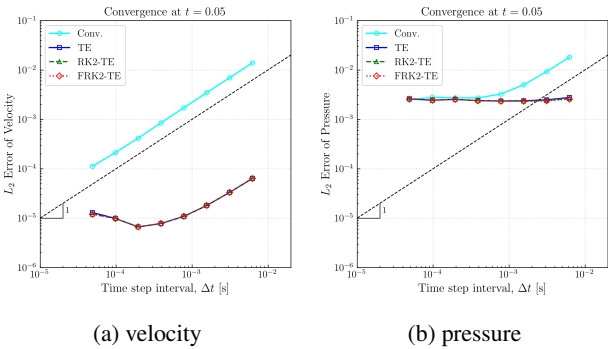


Fig. 1: Time Convergence at  $t = 0.05\text{s}$  (Moving particles)

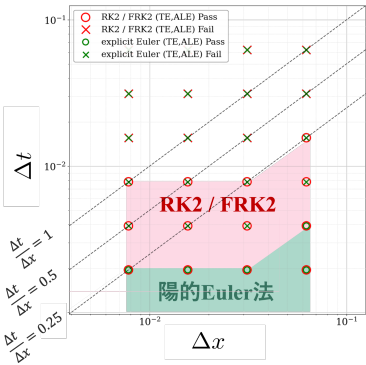


Fig. 2: Numerical stability ( $Re = 1000$ ).

Table 1: Computational cost per step (ms).

| Resolution               | EE    | RK2    | FRK2 (Prop.) |
|--------------------------|-------|--------|--------------|
| $L/64$ ( $N = 16,384$ )  | 18.85 | 32.14  | 22.36        |
| $L/128$ ( $N = 65,536$ ) | 74.61 | 120.25 | 89.99        |

5. 結言

本検証により，空間微分の誤差と Taylor 補間の累積誤差が時間精度の向上を制限する要因として残存するものの，FRK 法を導入した TE-ISPH 法のフレームワークは，従来法の 1.2 倍の低計算コストで RK 法と同等の数値安定性を実現できることが確認された．PPE を最終段でのみ解くことによるコスト削減効果は大きく，長時間の計算を要する非圧縮性流体解析の実用的なソルバーとして有望である．

参考文献

1) Sanderse, B. and Koren, B.: Accuracy analysis of explicit Runge–Kutta methods applied to the incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 231, 2012.  
2) Aithal, A.B., Tipirneni, M., Ferrante, A.: Temporal accuracy of FastRK3, *J. Comput. Phys.*, 475, 2023.  
3) Matsunaga, T. and Koshizuka, S. : Improvement of the time marching method in a particle method, *Trans. JSME*, 87, 2021, pp. 20-437.  
4) Asai, M., Fujioka, S., Saeki, Y., Morikawa, D.S. and Tsuji, K. : A class of second-derivatives in the Smoothed Particle Hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 415, 2023, 116203.

## 機械学習ウォームスタート予測子による陰的運動論ソルバーの高速化 (シンポジウム講演概要)

### A machine-learning-based warm-start predictor for accelerating an implicit kinetic solver (Proceedings of Symposium on Applied Mechanics)

宿南 湧真 (兵庫県大・情報) 安田 修悟 (兵庫県大・情報) Martin FRANK (SCC, KIT)

Yuma SHUKUNAMI, Graduate School of Information Science, University of Hyogo

Shugo YASUDA, Graduate School of Information Science, University of Hyogo

Martin FRANK, Scientific Computing Center, Karlsruhe Institute of Technology

E-mail: minamium.shukunami@gmail.com

運動論モデルの陰解法では、衝突項に起因する強い数値的剛性のため内部 Picard 反復回数が増大し、計算コストが支配的となる。本研究では、巨視量の 1 ステップ更新量をニューラルネットワークで予測する Warm-Start 予測子を導入し、陰解法の初期値を改善する手法を提案する。Boltzmann-BGK 方程式に対する有限体積陰解法に適用し、Sod 衝撃管問題において Picard 反復回数を大幅に削減できることを示す。

#### 1. はじめに

希薄気体の衝撃波や蒸発・凝縮流など、界面近傍で強い非平衡が生じる気体の輸送現象に対しては、分子の衝突過程を考慮した気体分子運動論（ボルツマン方程式）による記述が必要となる。またボルツマン方程式は連続体極限において、通常の流体力学の基礎方程式であるナビエ=ストークス方程式を導出できることから、流体力学のメソスコピック理論としても重要な意義を有する。<sup>1)</sup>

一方で、ボルツマン方程式やそのモデル方程式（運動論モデル）では、時間および空間変数に加えて、気体分子の速度も独立変数として扱う必要があるため、運動論モデルの数値計算は、連続体モデルと比較して計算コストが大きくなる。さらに、連続体極限近傍では、分子の衝突過程を記述する衝突項の緩和時間が、マクロな時間スケールに比べて非常に短くなるため、数値的な剛性も問題となる。

数値的剛性に対する代表的な対処法として陰解法が用いられるが、運動論モデルは衝突項に複雑な非線形項を含むため、単純な陰解法では各時間ステップにおいて非線形問題を解くためのピカル反復が必要となる。しかし、その反復回数は連続体極限において著しく増加するため、陰解法のみでは数値的剛性を十分に緩和することが難しい。

この種の課題に対して、運動論モデルと関連する巨視量方程式を援用した加速法（例えば、HOLO スキーム<sup>2)</sup>）や漸近保存型スキーム（Asymptotic Preserving 法<sup>3)</sup>）など、様々な高度な数値スキームの開発・研究が活発に行われている。しかし、これらの数値スキームは、個々の運動論モデルの理論的な解析によって個別に導出されるものであり、一般的な運動論モデルに対する汎用性のある手法とは言い難い。

そこで本研究では、運動論モデルの一般的な陰解法スキームに対して、ニューラルネットワークを導入し、内部ピカル反復を加速する Warm-Start 予測子を組み込む手法を提案する。これにより、既存の陰解法の構造を維持したまま低コストで数値的剛性の影響を緩和することができるようになる。

#### 2. Boltzmann-BGK 陰解法と Picard 反復

本節では、物理空間 1 次元、速度空間 1 次元の BGK 方程式に対する陰解法スキームとその内部ピカル反復について解説する。

#### 2.1. BGK モデル方程式

物理空間 1 次元 ( $x$ )、速度空間 1 次元 ( $v$ ) の BGK 方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_M - f}{\tau}, \quad (1)$$

ここで、 $f(t, x, v)$  は速度分布関数、 $f_M(t, x, v)$  は局所マクスウェル分布、 $\tau(t, x)$  は衝突項緩和時間である。

局所マクスウェル分布  $f_M(t, x, v)$  と緩和時間  $\tau(t, x)$  は、速度分布関数  $f(t, x, v)$  のモーメントから次のように定義される巨視量（数密度  $n(t, x)$ 、流速  $u(t, x)$ 、温度  $T(t, x)$ ）,

$$n(x, t) = \int f(x, v, t) dv, \quad (2a)$$

$$n(x, t)u(x, t) = \int v f(x, v, t) dv, \quad (2b)$$

$$n(u^2 + T) = \int v^2 f(x, v, t) dv. \quad (2c)$$

を用いて、以下のように求められる。

$$f_M(x, v, t) = \frac{n(x, t)}{\sqrt{2\pi T(x, t)}} \exp\left(-\frac{(v - u(x, t))^2}{2T(x, t)}\right), \quad (3)$$

$$\tau(x, t) = \frac{\bar{\tau}}{n(x, t) \sqrt{T(x, t)}}. \quad (4)$$

ここで、 $\bar{\tau}$  は、時空間に依存しない定数パラメータである。

#### 2.2. 陰解法スキーム

BGK 方程式 (1) の有限体積法に基づく陰解法スキームは次のように書かれる。

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1} \right) + \frac{\Delta t}{\tau_i^{k+1}} \left( f_{M,i,j}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1} \right). \quad (5)$$

ここで、上付き添字  $k$  は時間ステップ、下付き添字  $i, j$  はそれぞれ、空間メッシュと速度空間メッシュを表す。また、右辺第 2 項にあるハット “ $\hat{\phantom{x}}$ ” は有限体積セル界面での数値フラックスを表す。

#### 2.3. 内部ピカル反復

陰解法スキーム (5) の解  $f_{i,j}^{k+1}$  は、Algorithm1 のピカル反復によって求める。ここで、収束判定は許容誤差 `abs_tol`

を用いて次のように行う.

$$\left\| \frac{\mathbf{W}_i^{(z+1)} - \mathbf{W}_i^{(z)}}{\text{abs\_tol} + \text{picard\_tol} \max\left(\left\|\mathbf{W}_i^{(z+1)}\right\|, \left\|\mathbf{W}_i^{(z)}\right\|\right)} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (6)$$

#### Algorithm 1 Fully implicit BGK step with Picard iteration

1. 初期化:  $f^{(0)} \leftarrow f^k$  とし,  $f^{(0)} \mapsto \mathbf{W}^{(0)} = (n, (nu), T)$  を計算する.
2. for  $z = 0, 1, \dots, N_{\max} - 1$ :
  - (a)  $f^{(z)} \mapsto \mathbf{W}^{(z)} = (n, (nu), T)$  を計算し,  $\tau^{(z)}, f_M^{(z)}$  を構成する.
  - (b)  $\{A_j(\mathbf{W}^{(z)}), \mathbf{b}_j(\mathbf{W}^{(z)})\}$  を組み立て,  $A_j f_{i,j}^{(z+1)} = \mathbf{b}_j$  (速度ごとの三重対角) を batched GTSV で解き,  $f^{(z+1)}$  を得る.
  - (c)  $f^{(z+1)} \mapsto \mathbf{W}^{(z+1)}$  を計算し, 収束条件 (6) を満たせば停止する.
3.  $f^{k+1} \leftarrow f^{(z+1)}$ .

#### 3. MIWS-Net: Macro Informed Warm Start Neural Network

MIWS-Net は, BGK 方程式の非線形性が巨視量に依存する点に着目し, ピカル反復の初期値を“巨視量空間”で直接改善するための Warm-Start 予測子モデルである. 具体的には, セルごとの入力として  $\mathbf{W}^k = (n^k, (nu)^k, T^k)$  とスカラー条件  $(\Delta t, \bar{\tau})$  を与え, 出力として  $\Delta \mathbf{W}$  (次時刻に向けた巨視量の更新量) を予測する. CNN により空間局所構造 (衝撃波近傍の勾配・局在) を捉え, ResNet により安定な残差学習として  $\Delta \mathbf{W}$  を学習することで, 平坦領域での不要な摂動を抑えつつ, 支配的な非線形モードを先に潰すことを狙う. 推論は時間ステップごとに 1 回であり, 分布関数が物理次元と速度次元を持つことに比べて, MIWS-Net は物理次元のみの推論であるので計算コストは通常線形ソルバが支配的となるよう設計可能である. そして, 推論によって得られた  $\Delta \mathbf{W}$  に基づいてピカル反復の初期値を与え, 既存解法のフローのまま反復削減を行えることが特徴である (Algorithm2).

#### Algorithm 2 MIWS-Net warm-start for fully implicit BGK step

1. 入力:  $\mathbf{W}^k$  と条件  $(\Delta t, \bar{\tau})$ .
2. 推論:  $\Delta \mathbf{W} \leftarrow \text{MIWS-Net}(\mathbf{W}^k; \Delta t, \bar{\tau})$ .
3. warm-start 巨視量:  $\mathbf{W}^{(0)} \leftarrow \mathbf{W}^k + \Delta \mathbf{W}$ .
4. warm-start 初期分布:  $f^{(0)} \leftarrow f_M(\mathbf{W}^{(0)})$  として初期値を構成する.
5. 以降の Picard 反復は Algorithm1 と同一とする.

#### 4. 性能評価と結果

一次元 Sod shock tube 問題を, 空間分割数  $n_x = 1024$ , 速度空間分割数  $n_v = 256$ , 時間刻み幅  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , ステップ数 100steps, 緩和時間パラメータ  $\bar{\tau} = 5 \times 10^{-7}$  の条件で数値計算し, 性能評価結果を Table.1 および Fig.1 に示す. ここで, “Base” は Algorithm1, “Warm-Start” は Algorithm2 の結果を表す.

Table.1 は, Picard 収束許容値  $\text{tol}$  を変化させた場合の総反復回数  $\text{iters}_b$  (Base),  $\text{iters}_w$  (Warm-Start) と, その比  $\text{sp}_{it} = \text{iters}_b / \text{iters}_w$  を示す.  $\text{tol} = 10^{-6}$  において  $\text{sp}_{it} = 3.33$  が得られ, Warm-Start により反復回数が大きく削減されるこ

とが確認できる.

Fig.1 (左軸) は 1 ステップ当たり平均計算時間を示し, 反復回数の削減に対応して Walltime も同程度の倍率で短縮されており, 本設定では MIWS-Net の推論コストは Picard 反復計算に比べ十分小さいことが分かる. また Fig.1 (右軸) は, Base の  $\text{tol} = 10^{-8}$  を参照解として最終ステップにおける巨視量の差の  $L_{\infty}$  ノルムを示す. Warm-Start は  $\text{tol} = 10^{-6}$  程度まで参照解に対して同程度, あるいはそれ以下の誤差に収束しており, 反復削減と精度の両立が確認できる. なお Walltime の計測は NVIDIA A30 GPU 上で行った.

Table 1 Total Picard iterations (Base and Warm start).

Here  $\text{sp}_{it} = \text{iters}_b / \text{iters}_w$ .

| tol              | iters <sub>b</sub> | iters <sub>w</sub> | sp <sub>it</sub> |
|------------------|--------------------|--------------------|------------------|
| 10 <sup>-4</sup> | 150493             | 113602             | 1.32             |
| 10 <sup>-5</sup> | 347869             | 133962             | 2.60             |
| 10 <sup>-6</sup> | 504556             | 151724             | 3.33             |
| 10 <sup>-7</sup> | 586876             | 184022             | 3.19             |
| 10 <sup>-8</sup> | 609104             | 225637             | 2.70             |

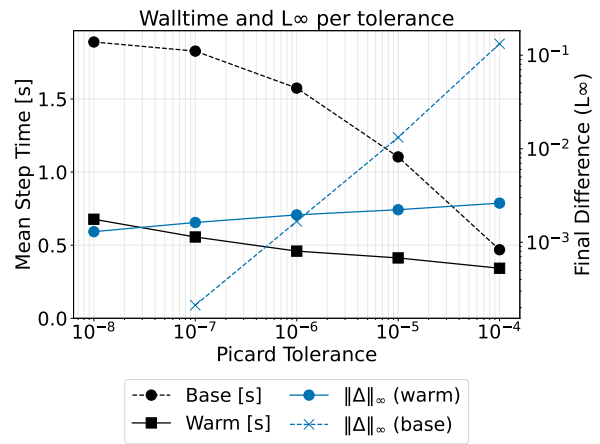


Fig. 1 Mean step time (Base and Warm start) per Picard tolerance and final  $L_{\infty}$  differences.

#### 5. kineticEQ

本研究で開発したソルバは kineticEQ としてパッケージ化している. kineticEQ は, 主に運動論方程式を対象とした GPU ソルバであり, Python/ PyTorch を基盤として C++/CUDA 拡張により計算コアを実装している. 詳細は講演時に説明する.

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 25K07246 の助成および学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (JHPCN) の支援 (課題番号 jh250073) を受けた.

#### 参考文献

- 1) 曾根良夫, 青木一生著: 分子気体力学 (朝倉書店, 1994).
- 2) W. T. Taitano, et. al.: Moment-Based Acceleration for Neutral Gas Kinetics with BGK Collision Operator, J. Comput. Theor. Trans., **43**, (2014).
- 3) S. Jin: Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations, SIAM J. Sci. Comput., **21** (1999).