

ペンジュラム・パターンの生成プロセスの「加速度」に基づく解析(11)

ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデル化による形体情報の観察・把握の方法(17)

Analysis based on the "acceleration" of the generation process of the Pendulum Pattern(11)

Analysis of Pendulum Pattern - Methodology of Form Analysis based on Mathematical Modeling(17)

石井宏一

Ishii Kouichi

秋田大学

Abstract : Pendulum Pattern, which was one of the non-graphics way, was well-developed in art, design and phototechnical area. The forms of Pendulum Pattern, which is different from the general expression in graphics. Today, the study of Pendulum Pattern itself is not developed as it is difficult to describe the basic rule. In this study, I describe Pendulum Pattern generated rules by mathematical principle

Key Word : motion on the sphere surface, "Two forces" caused by "velocity" and "gravity", Transition of correlation between "two forces"

modeling based on theories of non-linear dynamical systems. As a result I confirmed the following. (1)The transition state of "Two forces" caused by "velocity" and "gravity" has a great influence on the characteristics of the Pendulum Pattern. (2)The transition in the correlation between the "Two forces" is thought to be caused by the shape of the sphere surface, which is a constraint on mass motion.

・はじめに

「ペンジュラム・パターン」は「振り子の減衰運動の軌跡」を記録した形である。1980年代まではデザイン学や構成学で盛んに研究がなされたが、「再現性がない」ことから「形体解析が不可能」であり、現在では「終わってしまった」研究課題とされる。前報¹⁾までにペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデル化²⁾とコンピュータ・シミュレーションによって問題点を解消し、造形特性の明確化を目的とする形体解析が可能であることを論じてきた。特に従前の方法では解明できなかった形体生成初期に生じる軌跡の「乱れ」の原因が「球面上に拘束された質点運動」という形体生成システム自体にあることを指摘した。その後「重力」起因と「速度」起因の「2つの力の関係」が生成形体の形質に影響を与え、「乱れ」の原因であることを推測可能な現象を確認するに至ったので、この事例を本稿において報告する。

1. 「乱れない形」とは?

本研究のこれまでの知見から、ペンジュラム・パターンの生成のあたって「乱れない」理想的な形状を得るためには、質点の射出角度に関わらず $x-y$ 平面上の原点 O を基軸に「① $Z_{top}(\tau)$ と $Z_{top}(\tau+1)$ の角度($dist①$)が 180° に漸近」、「② $Z_{top}(\tau)$ と $Z_{under}(\tau)$ の角度($dist②$)が 90° に漸近する」という2つ(図1-1、2-1)の要件に加えて、「③ $1/2 \cdot KE(t) - PE(t) = E(t)$ を満たす」すなわち「 $1/2 \cdot KE(t) = PE(t)$ 」を示す領域にあることが確認できる(図1-2、2-2)。

このように、「乱れない形」を生成するためには①~③を満たす必要があると考えられる。

2. ペンジュラム・パターンの「数理モデル」と「関与する力」

一方、ペンジュラム・パターンの生成規則は「球面上に拘束された質点運動」と同定可能な数理モデルに基づき、以下の常微分方程式で規定できる。

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -k\dot{x}(t) + A(t)x(t) \\ \ddot{y}(t) &= -k\dot{y}(t) + A(t)y(t) \\ \ddot{z}(t) &= -k\dot{z}(t) - gl + A(t)z(t) \\ A(t) &= gl \cdot z(t) - \dot{x}(t)^2 - \dot{y}(t)^2 - \dot{z}(t)^2\end{aligned}$$

k は減衰係数、 g は重力、 l は球面半径。

ここで「重力」起因の力を $P(t)$ 、「速度」起因の力を $C(t)$ とし

$$P(t) = gl \cdot z(t)$$

$$C(t) = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$$

なお質点は滑らかな球面上に拘束され、質点位置 $r(t)$ は「 $r(t) \cdot r(t) = l^2$ 」を満たす。ここで拘束力 $R(t)$ の向きは球面の法線方向である質点の位置ベクトルの向きと等しく、

$$C(t) + P(t) = 0$$

が成り立つとすると、生成形体の「乱れ」の有無は $C(t)$ と $P(t)$ のバランスが大きく関与していると考えられる。特に g/l が時間経過に関わらず一定であることを考慮すると、質点射出の「角度」の設定と「速度」の「減衰」が $C(t)$ を変動させ、生成形体の形状に影響を与えると考えられる。

3. 「重力」及び「速度」を起因とする力に基づく形体解析

3.1 形体解析を行う上での指標の設定

そこで、 $P(t)$ 、 $C(t)$ に基づく形体解析を実施し、両者のバランスがペンジュラム・パターンの「乱れ」の有無にどのように影響しているのか、確認することとした。

$P(t)$ のうち直接、形体生成に関わる運動成分は

$$gr(t) = gl \cdot h(t) \quad (h(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2})$$

であり、さらに水平、垂直方向に分解し $gr-h(t)$ 、 $gr-v(t)$ を得る。

$$\begin{aligned}gr-h(t) &= gr(t) \cdot \cos \theta \\ gr-v(t) &= gr(t) \cdot \sin \theta \quad (\theta = \tan^{-1}h(t) / -z(t))\end{aligned}$$

一方、 $C(t)$ も同様に水平、垂直方向に分解し

$$\begin{aligned}Ch(t) &= C(t) \cdot \sin \theta \\ Cv(t) &= C(t) \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

ここで、 $gr-h(t)$ 、 $gr-v(t)$ 、 $Ch(t)$ 、 $Cv(t)$ の関係は

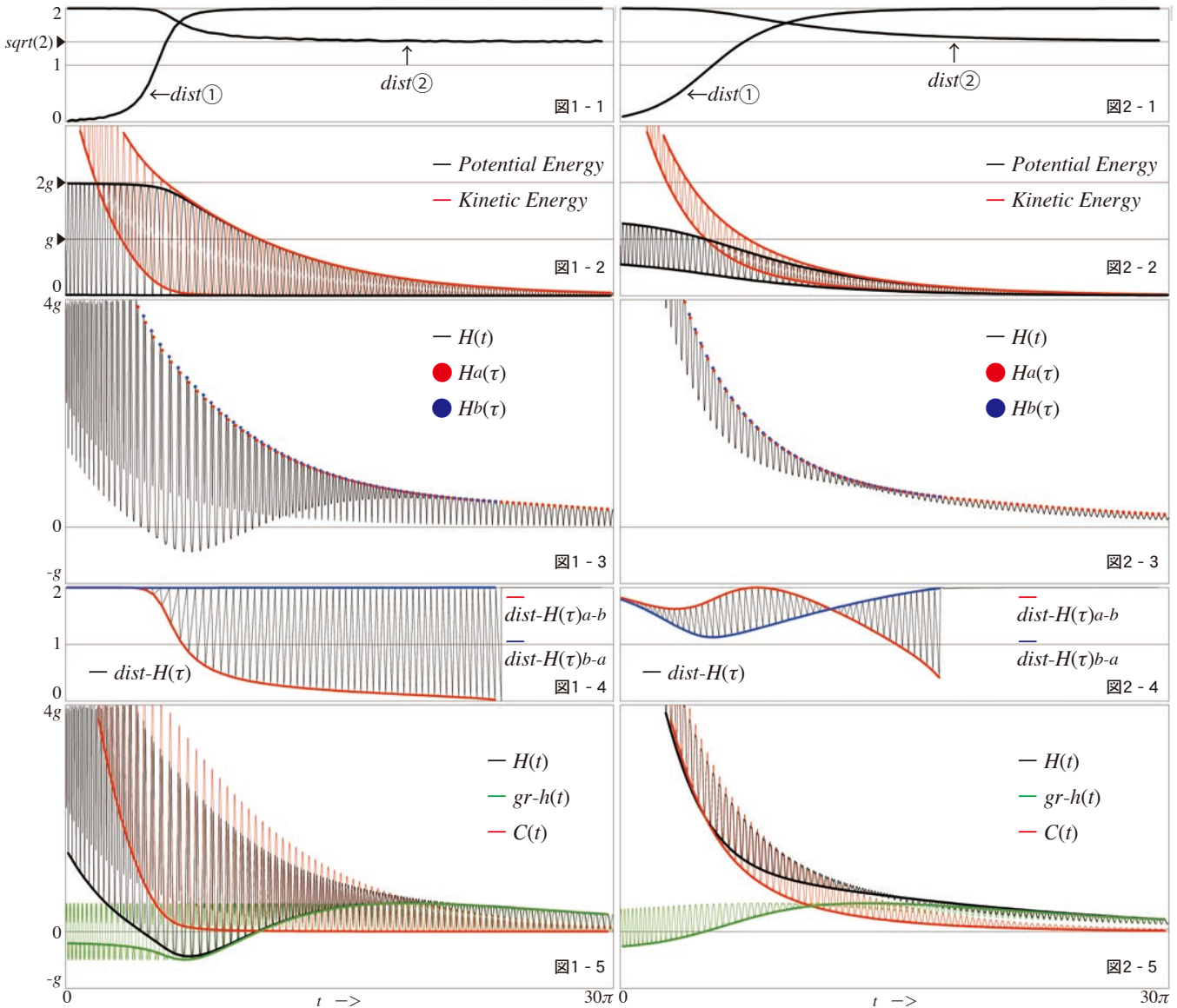
$$\begin{aligned}H(t) &= Ch(t) - gr-h(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \\ V(t) &= Cv(t) + gr-v(t) = \dot{z}(t)\end{aligned}$$

であり、 $H(t)$ は水平方向、 $V(t)$ は垂直方向の質点運動に関与する力と同定できるが、本稿では形体解析の実施にあたり、特に $H(t)$ に注目した。図1-3に鉛直振り子、図2-3に円錐振り子の様態傾向を示す $H(t)$ の振動波形を提示する。この振動波形 $H(t)$ は両者とも「高振幅」と「低振幅」という2つの振幅を有する特徴としている。そこで両者の境界となる波形頂点 $Ha(\tau)$ 、 $Hb(\tau)$ に基づき前者を「 $a-b$ 」、後者を「 $b-a$ 」と区分

※射出速度: 10.0m/s $x_s = 0.994, y_s = 0, k = 0.05, g/l = 9.8$

図1 射出角度 = 120° (鉛直振り子の様態)

図2 射出角度 = 92.5° (円錐振り子の様態)



図「重力」及び「速度」を起因とする力に基づく形体解析

し、それぞれの振幅区間の $x - y$ 平面上の原点 O を基軸とする角度変化に基づき形体解析を試みた。

3.2 解析結果

解析結果を図 1 (鉛直振り子)、図 2 (円錐振り子) に示す。

3.2.1 $H_a(\tau), H_b(\tau)$ の $x - y$ 平面上の角度変化

$H(t)$ の波形頂点 $H_a(\tau), H_b(\tau)$ に基づき、両者の $x - y$ 平面上の原点 O を基軸とする二点間の角度 $dist(\tau)$ を測定した。

$$dist(\tau) = \sqrt{(x(\tau+1) - x(\tau))^2 + (y(\tau+1) - y(\tau))^2}$$

3.2.1.1 「鉛直振り子」の様態を示す場合

$z(t) < 0$ 全般で「 $a - b$ 」の場合は 0° に、一方「 $b - a$ 」は 180° に漸近する。なお、生成形体の「乱れ」は発生しない(図 1-4)。

3.2.1.2 「円錐振り子」の様態を示す場合

$z(t) < 0$ 全般で「 $a - b$ 」は一旦 180° に漸近後 0° まで急減、一方「 $b - a$ 」は一旦、 60° 付近に漸近後 180° で安定的に推移する。

なお「 $a - b$ 」と「 $b - a$ 」の交叉前において生成形体は「乱れ」を発生するが、交叉後は「乱れの消失」が確認できる(図 2-4)。

3.2.2 両者の力学的特性の違い

前項の $dist(\tau)$ の様態から形体生成システムとしての「鉛直振り子」と「円錐振り子」の力学的特性の違いが明らかになった。

3.2.2.1 「鉛直振り子」の様態を示す場合

$z(t) < 0$ の全般において、 $H(t)$ と $gr-h(t)$ の同調が確認できる。このことから、鉛直振り子の運動様態は基本的に「重力」起因であり、重力の安定性への寄与が推察できる(図 1-5)。

3.2.2.2 「円錐振り子」の様態を示す場合

「 $a - b$ 」と「 $b - a$ 」の交叉前後における運動様態の相違に基づく、交叉前は $C(t)$ と $H(t)$ の同調を起因に「乱れる」のに対し、交叉後 $H(t)$ は $gr-h(t)$ と同調し「乱れの消失」が確認できる(図 2-5)。このことから「乱れ」の原因は過大な「速度」付与により生じた「遠心力」であり、減衰による速度低下によって徐々に「重力」主導へ移行し、安定的な運動へ至ることが推察できる。

注

- 1) 拙稿、ベンジュラム・パターン生成プロセスの「加速度」に基づく解析(10) - ベンジュラム・パターンの生成規則の数理モデル化による形体情報の観察・把握の方法(16)、デザイン学第71回研究発表大会梗概集、日本デザイン学会、2024
- 2) 石井宏一、高橋信行、上田よし亮、非線形力学系の情報表現論・情報構成的な解析、電子情報通信学会技術研究報告 Vol.103, No.185, NLP2003-35, 2003, pp.37-42

※本研究は JSPS 科研費 JP23K11738 の助成を受けたものです。